CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a IX-a
27.10.2023

SUBIECTUL I

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, M şi N mijloacele laturilor AB şi AC, iar D şi E sunt proiecţiile vârfurilor B şi C pe laturile opuse. Notăm cu P şi Q proiecţiile punctelor E şi D pe BD, respectiv CE. Dacă dreptele MP şi NQ sunt distincte şi paralele, determinaţi măsura unghiului BAC.

SUBIECTUL II

Determinaţi perechile (a, b) de numere naturale, cu $a, b \geq 2$, având proprietatea că există $x \in \mathbb{R}$ cu $\{x\} = \frac{1}{a}$ şi $\{x^2\} = \frac{1}{b}$.

SUBIECTUL III

(a) Fie a şi b două numere naturale nenule, prime între ele. Să se demonstreze că mulţimea $\{na - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq b\}$, conţine un număr divizibil cu b.

(b) Considerăm o serie de $n + 1$ aruncări ale unei monede (fiecare aruncare va rezulta în cap sau pajură), unde $n \geq 1$. Fie p_1 procentajul de aruncări care sunt pajură după primele n aruncări şi p_2 procentajul de aruncări care sunt pajură după toate cele $n + 1$ aruncări. Să se determine toate numerele raţionale q, cu $0 < q < 1$, care au proprietatea că există n şi o serie de aruncări descrisă mai sus astfel încât $p_1 < q < p_2$.

SUBIECTUL IV

Spunem că perechea de cifre nenule (a, k) este *ciclică* dacă există un număr natural nenul n şi n cifre $a_1, \ldots, a_n$, cu $a_n \neq 0$, astfel încat

$$k \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a} = \overline{a a_n a_{n-1} \ldots a_1}.$$

(a) Să se demonstreze că perechea $(6, 4)$ este *ciclică*.

(b) Să se demonstreze că perechea (a, k) este *ciclică* dacă şi numai dacă $a \geq k$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru efectiv este de 3 ore.

Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

SUCCES!

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a IX-a
27.10.2023
Barem

SUBIECTUL I

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, M şi N mijloacele laturilor AB şi AC, iar D şi E sunt proiecţiile vârfurilor B şi C pe laturile opuse. Notăm cu P şi Q proiecţiile punctelor E şi D pe BD, respectiv CE. Dacă dreptele MP şi NQ sunt distincte şi paralele, determinaţi măsura unghiului BAC.

Liliana Niculescu, GMB

SOLUŢIE. Demonstrăm mai întâi ca $PQ \parallel BC$. În acest scop, Fie H intersecţia înalţimilor BD şi CE. Triunghiurile EPH şi DQH sunt asemenea din cazul (UU), deci

$$\frac{EH}{DH} = \frac{PH}{QH}.$$

Tot din cazul (UU), triunghiurile BEH şi CDH sunt asemenea, de unde

$$\frac{EH}{DH} = \frac{HB}{HC}.$$

Astfel, punând împreună aceste două egalităţi, obţinem

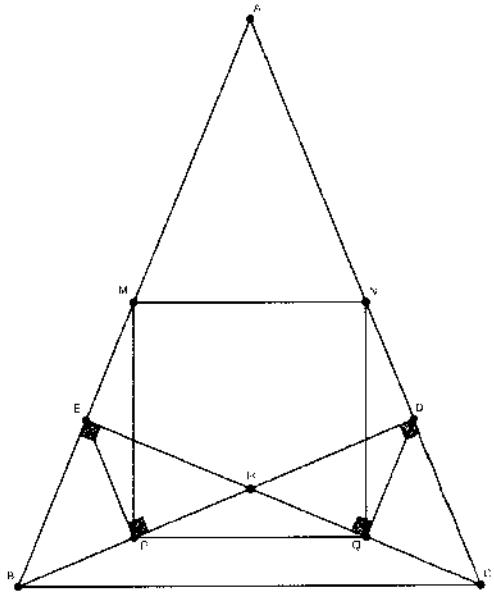
$$\frac{PH}{QH} = \frac{HB}{HC},$$

de unde rezultă că $PQ \parallel BC$.

Mai departe, deoarece (MN) este linie mijlocie, avem de asemenea $MN \parallel BC$, de unde $PQ \parallel MN$. Din ipoteză, $MP \parallel NQ$, de unde rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram. Dar atunci

$$PQ = MN = \frac{BC}{2},$$

iar cum $PQ \parallel BC$, obţinem că (PQ) este linie mijlocie în triunghiul HBC. Aşadar, (EP) este şi înălţime şi mediană în triunghiul dreptunghic EBH. Astfel, măsura unghiului EBH este de $45°$, de unde rezultă că măsura unghiului BAC este de $45°$.



□

Barem

- $PQ \parallel BC$ **3p**
- $MNPQ$ paralelogram **2p**
- PQ linie mijlocie în triunghiul HBC **1p**
- Finalizare **1p**

SUBIECTUL II Determinaţi perechile (a, b) de numere naturale, cu $a, b \geq 2$, având proprietatea că există $x \in \mathbb{R}$ cu $\{x\} = \frac{1}{a}$ şi $\{x^2\} = \frac{1}{b}$.

Bogdan Blaga

SOLUŢIE. Din prima ecuaţie avem $x = n + 1/a$, unde $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $x^2 = n^2 + 2n/a + 1/a^2$, deci $\{x^2\} = \{2n/a + 1/a^2\}$. Astfel, vrem ca $2n/a + 1/a^2 - 1/b \in \mathbb{Z}$, deci $(b - a^2 + 2nab)/(a^2b) \in \mathbb{Z}$, echivalent cu $a^2b \mid b - a^2 + 2nab$. Prin înmulţire cu b deducem $a^2b \mid b^2 - a^2b + 2nab^2$, de unde $a^2b \mid b^2 + 2nab^2 = b^2(1 + 2na)$.

Avem acum $a^2 \mid b(1 + 2na)$, dar $(a^2, 1 + 2na) = 1$, astfel că $a^2 \mid b$. Fie $b = ca^2$ pentru un $c \in \mathbb{N}^*$. Atunci, prima relaţie de divizibilitate devine

$$ca^4 \mid ca^2 - a^2 + 2nca^3,$$

de unde $ca^2 \mid c - 1 + 2nca$. Deducem astfel că $c \mid 1$, de unde $c = 1$ şi atunci $b = a^2$. Aceasta este o condiţie necesară. Este şi suficientă deoarece putem lua atunci $x = a + 1/a$, care implică că $x^2 = a^2 + 2 + 1/a^2$, având partea fracţionară $1/a^2 = 1/b$. $\square$

Barem

- $x = n + 1/a$ **1p**
- $a^2b \mid b - a^2 + 2nab$ **1p**
- $a^2 \mid b$ **2p**
- $b = a^2$ **2p**
- Condiţie suficientă **1p**

SUBIECTUL III

(a) Fie a şi b două numere naturale nenule, prime între ele. Să se demonstreze că mulţimea $\{na-1 \mid n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq b\}$, conţine un număr divizibil cu b.

(b) Considerăm o serie de $n+1$ aruncări ale unei monede (fiecare aruncare va rezulta în cap sau pajură), unde $n \geq 1$. Fie p_1 procentajul de aruncări care sunt pajură după primele n aruncări şi p_2 procentajul de aruncări care sunt pajură după toate cele $n+1$ aruncări. Să se determine toate numerele raţionale q, cu $0 < q < 1$, care au proprietatea că există n şi o serie de aruncări descrisă mai sus astfel încât $p_1 < q < p_2$.

(***)

SOLUŢIE. (a) Presupunem prin reducere la absurd că pentru orice $1 \leq n \leq b$, $na-1$ nu este divizibil cu b. Există $b-1$ resturi nenule la împărţirea cu b, iar mulţimea din ipoteză conţine b elemente. Astfel, din principiul cutiei, există $1 \leq i < j \leq b$ pentru care $ia-1$ şi $ja-1$ dau acelaşi rest la împărţirea cu b. Atunci, $(j-i)a$ este divizibil cu b. Cum $(a,b)=1$, este necesar ca b să divida $j-i$, dar $j-i \in \{1,\ldots,b-1\}$, contradicţie.

(b) Presupunem că pajură apare de k ori în primele n aruncări, unde $0 \leq k \leq n$. Deoarece $p_1 < p_2$, aruncarea $n+1$ va fi pajură, deci avem $p_1 = \frac{k}{n}$ şi $p_2 = \frac{k+1}{n+1}$. Cum $q < 1$, avem de asemenea $k < n$.

Astfel, vrem să găsim toate numerele raţionale q, cu $0 < q < 1$, astfel încât există numere naturale k, n cu $0 \leq k < n$ şi

$$\frac{k}{n} < q < \frac{k+1}{n+1}.$$

Fie $q = \frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale nenule prime între ele. Astfel, dubla inegalitate de mai sus se poate rescrie echivalent ca

$$an - (b-a) < kb < an. \tag{1}$$

Dacă $b-a=1$, avem evident o contradicţie.

Dacă $b-a \geq 2$, pentru a satisface inegalităţile (1), este suficient să găsim $n \geq 1$ şi $0 \leq k < n$ astfel încât $kb = an-1$. Conform subpunctului (a), există $n \in \{1,\ldots,b\}$ astfel încât $an-1$ să fie divizibil cu b. Deci, există $k, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $an-1 = kb$. De asemenea, $k < n$, deoarece $a < b$. Astfel, am demonstrat că dacă $b-a \geq 2$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ astfel încât $\frac{k}{n} < q = \frac{a}{b} < \frac{k+1}{n+1}$.

În concluzie, numerele care convin sunt cele care <u>nu</u> sunt de forma $\frac{m}{m+1}$, unde $m \geq 1$, adică:

$$q \in (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \setminus \left\{ \frac{m}{m+1} \;\middle|\; m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

□

Barem

- (a) **2p**
- Notaţie şi expresiile pentru p_1, p_2 (nu este strict necesar dacă se rezolvă fără acest pas) ... **1p**
- $an-(b-a) < kb < an$ **2p**
- Cazul $b-a=1$ **1p**
- Cazul $b-a \geq 2$ **1p**

SUBIECTUL IV

Spunem că perechea de cifre nenule (a, k) este *ciclică* dacă există un număr natural nenul n şi n cifre $a_1, \ldots, a_n$, cu $a_n \neq 0$, astfel încat

$$k \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a} = \overline{a a_n a_{n-1} \ldots a_1}.$$

(a) Să se demonstreze că perechea $(6, 4)$ este *ciclică*.

(b) Să se demonstreze că perechea (a, k) este *ciclică* dacă şi numai dacă $a \geq k$.

(***)

SOLUŢIA 1. (a) De exemplu, deoarece $4 \cdot 153846 = 615384$, perechea $(6, 4)$ este ciclică.

Exemplul se poate obţine în felul următor: deoarece $k = 4$ şi $a = 6$, înmulţirea

$$4 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 6} = \overline{6 a_n a_{n-1} \ldots a_1}$$

implică $a_1 = 4$. Mergând mai departe, din această înmulţire trebuie sa ţinem 2 în minte. Acum, deoarece

$$4 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots 46} = \overline{6 a_n a_{n-1} \ldots a_2 4}$$

şi am ţinut 2 în minte, obţinem $a_2 = 8$. Continuând tot aşa, obţinem $4 \cdot 153846 = 615384$.

(b) " $\Longrightarrow$ " Dacă perechea (a, k) este ciclică, deoarece $a_n \geq 1$ şi numărul de cifre nu se schimbă după înmulţire, înseamna că $a \geq k a_n \geq k$.

" $\Longleftarrow$ " În sens invers, considerăm procedura iterativă descrisă la subpunctul anterior. Presupunem că la un moment dat înmulţim cifra a_i cu k şi avem în minte $b_i < k$. Iniţial, $a_0 = a$ şi $b_0 = 0 < k$. Atunci, $a_i k + b_i < 10k$, deoarece $a_i \leq 9$. Astfel, putem scrie $k a_i + b_i = 10c + d$, unde $c < k$ şi $d \in \{0, \ldots, 9\}$. Ţinem în minte $b_{i+1} = c < k$ şi urmatoarea cifră descoperită este $a_{i+1} = d$. Deci, pe parcursul procedurii, numarul ţinut în minte este mereu mai mic decât k.

Facem două observaţii:

1. Procedura este reversibilă. Mai exact, pentru (a_{i+1}, b_{i+1}) cu $b_{i+1} < k$ şi $a_{i+1} \in \{0, \ldots, 9\}$, există şi sunt unice (a_i, b_i) cu $b_i < k$ astfel încat $k a_i + b_i = 10 b_{i+1} + a_{i+1}$. Acest lucru provine din teorema împărţirii cu rest pentru deîmpărţitul $10 b_{i+1} + a_{i+1}$ şi împărţitorul k.

2. Dacă la un moment dat a_i şi b_i sunt astfel încât $k a_i + b_i = 10 b_{i+1} + a_{i+1} = a$, adică $b_{i+1} = 0$ şi $a_{i+1} = a$, procedura este finalizată cu $i = n$ şi putem concluziona că perechea (a, k) este ciclică.

Astfel, pornind de la $(a_0, b_0) = (a, 0)$, procedura generează perechi $(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$. Deoarece a_i este mereu o cifră şi $b_i < k \leq 9$, există cel mult 90 de perechi distincte (a_i, b_i). Astfel, la un moment dat, există o repetiţie de perechi. Deoarece procesul este reversibil, mergând în sens invers, prima dată când avem o repetiţie este pentru $(a_{i+1}, b_{i+1}) = (a_0, b_0)$, de unde concluzia. □

SOLUŢIA 2. Pentru un număr natural nenul x si cifra $0 \leq a \leq 9$, vom folosi notaţia $\overline{xa}$ pentru numărul obţinut prin concatenarea cifrei a la dreapta numărului x, adică $\overline{xa} = 10x + a$. Analog definim şi $\overline{ax}$.

(a) Vom căuta x astfel încat $4 \cdot \overline{x6} = \overline{6x}$. Fie n numărul de cifre ale lui x. Astfel, ecuaţia se rescrie echivalent ca

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^n + x \iff 13x = 2(10^n - 4).$$

Căutăm n astfel încât $10^n \equiv 4 \pmod{13}$. Resturile numărului 10^n modulo 13 pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4$ şi 5 sunt $1, 10, 9, 12, 3$ şi 4, respectiv. Astfel, $n = 5$ convine, care duce la $x = 15384$. Se poate verifica uşor că $4 \cdot 153846 = 615384$.

(b) Generalizând ideea precedentă, trebuie să demonstrăm că există nu număr natural nenul x astfel încât $k \cdot \overline{xa} = \overline{ax}$ dacă şi numai dacă $a \geq k$. Notând cu n numărul de cifre ale lui x, ecuaţia se rescrie ca

$$x = \frac{a(10^n - k)}{10k - 1}. \tag{2}$$

" $\Longrightarrow$ " Dacă perechea (a, k) este ciclică, atunci există un astfel de numar x de n cifre. Astfel,

$$\frac{a(10^n - k)}{10k - 1} \geq 10^{n-1} \iff a - k \geq \frac{ak}{10^n} - \frac{1}{10}.$$

Cum $\frac{ak}{10^n} - \frac{1}{10} > -1$ şi $a - k$ este un număr intreg, este necesar ca $a \geq k$.

" $\Longleftarrow$ " Presupunem că $a \geq k$ şi demonstrăm că există x de n cifre astfel încat ecuaţia (2) are loc.

Cautăm, pentru moment, n astfel încat $10^n \equiv k \pmod{10k-1}$. Deoarece 10 şi $10k-1$ sunt prime între ele, relaţia precedentă este echivalentă cu $10^{n+1} \equiv 10k \pmod{10k-1}$, sau $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{10k-1}$. Putem alege $n = \varphi(10k-1) - 1$, unde $\varphi(\cdot)$ este indicatorul lui Euler (Alternativ, existenţa unui astfel de n se poate demonstra similar ca în Problema 3, considerând şirul $10^1, 10^2, \ldots, 10^{10k-1}$ şi observând că niciun termen nu este divizibil cu $10k-1$, deci doi dau acelaşi rest la împărţirea cu $10k-1$.).

Rămâne de demonstrat că $\frac{a(10^n-k)}{10k-1}$ are n cifre, adică

$$10^{n-1} \leq \frac{a(10^n - k)}{10k - 1} < 10^n. \tag{3}$$

Pentru inegalitatea dreaptă din (3):

$$\frac{a(10^n - k)}{10k - 1} \leq \frac{9(10^n - 1)}{9} < 10^n.$$

Pentru inegalitatea stângă din (3):

$$\frac{a(10^n - k)}{10k - 1} \geq \frac{k(10^n - k)}{10k - 1}$$

şi $\frac{k(10^n-k)}{10k-1} \geq 10^{n-1}$ dacă şi numai dacă $k^2 \leq 10^{n-1}$. Cum $k \leq 9$, inegalitatea este evidentă pentru $n \geq 3$. Deoarece $k \in \{1, \ldots, 9\}$ şi $n = \varphi(10k-1) - 1$, avem de fapt $n \geq 5$, ceea ce duce la concluzie.

□

Barem

- (a) Exemplu (cu sau fără deducţie) **2p**
- (b) " $\Longrightarrow$ " **1p**
- " $\Longleftarrow$ " **4p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a X-a
27.10.2023

SUBIECTUL I

Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $z^2 - 2z$ este un număr real negativ.

SUBIECTUL II

Fie $m \geq 3$ un număr natural. Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < m \\ x - 2, & x \geq m. \end{cases}$$

Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_1 = a \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$ pentru orice $n \geq 1$. Determinaţi valorile lui a pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ e periodic şi, pentru aceste valori, determinaţi perioada cea mai mică a sa.

SUBIECTUL III

Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{R}$ este *acoperibilă* dacă pentru orice submulţime proprie nevidă A a mulţimii M, există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

- pentru orice $x \in A$, $\sin(ax) \geq 0$, şi
- pentru orice $x \in M \setminus A$, $\sin(ax) < 0$.

Să se determine toate numerele naturale nenule n astfel încât mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ este acoperibilă.

SUBIECTUL IV

(a) Inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz spune că

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

pentru orice $n \geq 2$ şi orice numere reale a_i, b_i. Să se demonstreze această inegalitate, pornind eventual de la faptul că $(a_it - b_i)^2 \geq 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi orice $t \in \mathbb{R}$.

(b) Fie $0 < s \leq t$. Să se determine cel mai mic număr real p cu proprietatea că

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq p(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2,$$

pentru orice $n \geq 2$ şi orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ care satisfac $s \leq \frac{a_i}{b_i} \leq t$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru efectiv este de 3 ore.

Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

SUCCES!

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a X-a
27.10.2023
Barem

SUBIECTUL I

Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $z^2 - 2z$ este un număr real negativ.

Gheorghe Ioncscu, Supliment GMB

SOLUŢIE. Ştim că $w \in \mathbb{C}$ e real dacă şi numai dacă $w = \overline{w}$. Obţinem, deci, $z^2 - 2z = \overline{z}^2 - 2\overline{z}$, care devine $(z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 2(z - \overline{z})$, sau, echivalent $(z - \overline{z})(z + \overline{z} - 2) = 0$.

Dacă $z - \overline{z} = 0$, atunci $z = \overline{z}$, astfel că z e real şi $z^2 - 2z \leq 0$ dacă şi numai dacă $z \in [0, 2]$.

Dacă $z + \overline{z} - 2 = 0$, atunci acest lucru e echivalent cu $\mathrm{Re}(z) = 1$, astfel că $z = 1 + ib$ pentru $b \in \mathbb{R}$. Atunci, $z^2 - 2z = 1 + 2ib - b^2 - 2(1 + ib) = -1 - b^2 < 0$, deci orice $b \in \mathbb{R}$ funcţionează. $\square$

Barem

- $(z - \overline{z})(z + \overline{z} + 2) = 0$ **2p**
- Cazul $z = \overline{z}$ **2p**
- $z = 1 + ib$ **1p**
- $b \in \mathbb{R}$ **2p**

SUBIECTUL II

Fie $m \geq 3$ un număr natural. Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < m \\ x - 2, & x \geq m. \end{cases}$$

Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_1 = a \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$ pentru orice $n \geq 1$. Determinaţi valorile lui a pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ e periodic şi, pentru aceste valori, determinaţi perioada cea mai mică a sa.

Bogdan Blaga

SOLUŢIE. Demonstrăm mai întâi că se ajunge pe a doua ramură a funcţiei f. Formal, arătăm că există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $a_k \geq m$. Altfel, am avea $a_k < m$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Dar $f(x) > x$ pentru $x < m$ şi din $a_{n+1} = f(a_n)$ am obţine că $(a_n)_{n\geq 1}$ e un şir strict crescător şi mărginit de numere naturale, contradicţie.

Fie atunci k minim cu $a_k \geq m$. Arătăm acum inductiv că $a_n \geq m-2$ pentru orice $n \geq k$. Pentru $n = k$ este clar. Pentru $n > k$, dacă $a_{n-1} \geq m$, atunci $a_n = f(a_{n-1}) \geq m - 2$. Dacă $a_{n-1} \in \{m-2, m-1\}$, atunci $a_n = f(a_{n-1}) = a_{n-1}^2 + 1 > a_{n-1} \geq m - 2$.

Astfel, dacă $a < m - 2$, şirul nu va fi periodic, deci singurele valori posibile sunt $a = m - 2$ sau $a = m - 1$. Arătăm că ambele convin.

Pentru $a = m - 1$, avem $a_2 = (m-1)^2 + 1 > m$. Se va scădea repetat 2 din a_2 până când ajungem la $m-1$ sau $m-2$. Doarece a_2 şi $m-2$ au aceeaşi paritate, se va ajunge chiar la $m-2$. Astfel vom ajunge la $m - 2$ în $p_1 = \frac{(m-1)^2+1-(m-2)}{2}$ paşi. Cu alte cuvinte, $a_{p_1+2} = m - 2$. Apoi $a_{p_1+3} = (m-2)^2 + 1$. Se va scădea repetat din nou 2 până se ajunge la $m - 1$, deci vor fi $p_2 = \frac{(m-2)^2+1-(m-1)}{2}$ paşi. Cu alte cuvinte, avem $a_{p_1+3+p_2} = m - 1 = a_1$. Astfel, perioada minimă este $p_1 + p_2 + 3 - 1 = m^2 - 4m + 7$.

Dacă $a_1 = m - 2$, atunci observăm că avem aceeaşi paşi ca în cazul precedent, doar ordinea este în sens invers. Astfel, avem tot perioada minimă de $m^2 - 4m + 7$. □

Barem

- Există k cu $a_k \geq m$ **1p**
- $a_n \geq m - 2$ pentru $n \geq k$ **1p**
- a poate fi doar $m - 1$ sau $m - 2$ **1p**
- Cazul $a_1 = m - 1$ argumentare de ce ajungem la $m - 2$ **1p**
- Cazul $a_1 = m - 1$ numărul de paşi **2p**
- Cazul $a_1 = m - 2$ analog **1p**

SUBIECTUL III

Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{R}$ este *acoperibilă* dacă pentru orice submulţime proprie nevidă A a mulţimii M, există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

- pentru orice $x \in A$, $\sin(ax) \geq 0$, şi
- pentru orice $x \in M \setminus A$, $\sin(ax) < 0$.

Să se determine toate numerele naturale nenule n astfel încat mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ este acoperibilă.

(***)

SOLUŢIE. Evident, dacă $\{1, \ldots, n\}$ este acoperibilă pentru un $n \geq 1$, atunci $\{1, 2, \ldots, m\}$ este acoperibilă pentru orice $1 \leq m \leq n$. Astfel, demonstrăm că $\{1, 2, 3\}$ este acoperibilă, dar $\{1, 2, 3, 4\}$ nu este, de unde va rezulta că răspunsul este $n \in \{1, 2, 3\}$.

(I) $\{1, 2, 3\}$ este acoperibilă:

Dacă $A = \{1\}$, putem alege $a = 2$. Deoarece $0 < 2 \cdot 1 < \pi < 2 \cdot 2 < 2 \cdot 3 < 2\pi$, avem $\sin(a) > 0$, $\sin(2a) < 0$ şi $\sin(3a) < 0$. Dacă $A = \{2, 3\}$, deoarece funcţia sinus este impară, putem alege $a = -2$.

In mod analog, dacă $A = \{2\}$, putem alege $a = 4$, iar pentru $A = \{1, 3\}$, $a = -4$. Dacă $A = \{3\}$, putem lua $a = 5$, iar pentru $A = \{1, 2\}$, $a = -5$. Astfel, am acoperit toate cazurile.

(II) $\{1, 2, 3, 4\}$ nu este acoperibilă:

Demonstrăm că pentru $A = \{3\}$, cele doua condiţii nu pot fi îndeplinite simultan pentru niciun $a \in \mathbb{R}$. Presupunem că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin(3a) \geq 0$ şi $\sin(a) < 0$, $\sin(2a) < 0$, $\sin(4a) < 0$.

Deoarece $\sin(4a) = 2\sin(2a)\cos(2a) < 0$ şi $\sin(2a) < 0$, obţinem $\cos(2a) > 0$. Folosind identitatea $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, rezultă că $\sin^2(a) < \frac{1}{2}$.

Deoarece $0 \leq \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$ şi $\sin(a) < 0$, obţinem $\sin^2(a) \geq \frac{3}{4}$, contradicţie.

□

Barem

- Reducere la cele două cazuri **1p**
- Cele 6 submulţimi din primul caz ..... **6 × 0.5p**
- Alegerea $A = \{3\}$ **1p**
- $\sin^2(a) < 1/2$ **1p**
- Finalizare **1p**

Remarcă: Aceasă problemă este în strânsă legatură cu o noţiune din Machine Learning (o „ramură“ a inteligenţei artificiale), aşa numita dimensiune Vapnik-Chervonenkis („VC-dimension“), care măsoară „complexitatea“ unei familii de funcţii. Un exerciţiu mai dificil este demonstrarea faptului că, pentru orice $n \geq 1$, muţimea $\{2^{-i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ este acoperibilă, ceea ce arată că familia funcţiilor $\sin(ax)$ este (infinit) de complexă şi niciun algoritm nu o poate „învăţa“.

SUBIECTUL IV

(a) Inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz spune că

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

pentru orice $n \geq 2$ şi orice numere reale a_i, b_i. Să se demonstreze această inegalitate, pornind eventual de la faptul că $(a_it - b_i)^2 \geq 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi orice $t \in \mathbf{R}$.

(b) Fie $0 < s \leq t$. Să se determine cel mai mic număr real p cu proprietatea că

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq p(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2,$$

pentru orice $n \geq 2$ şi orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ care satisfac $s \leq \frac{a_i}{b_i} \leq t$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

(***)

SOLUŢIE. (a) Dacă $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, atunci $a_1 = \cdots = a_n = 0$ şi inegalitatea este evident adevărată. Presupunem deci $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. Avem $(a_it - b_i)^2 \geq 0$, deci $a_i^2t^2 - 2a_ib_it + b_i^2 \geq 0$. Însumând aceste inegalităţi pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, obţinem

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)t^2 - 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)t + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0.$$

Aceasta este o ecuaţie de gradul 2 în t cu coeficientul lui t^2 pozitiv. Deoarece expresia este pozitiva pentru orice t, discriminantul trebuie să fie negativ. În cazul nostru, această inegalitate pentru discriminant ne dă exact inegalitatea CBS.

(b) Pornim de la o idee similară ca la (a). Deoarece $s \leq \frac{a_i}{b_i} \leq t$ avem

$$\left(t - \frac{a_i}{b_i}\right)\left(\frac{a_i}{b_i} - s\right) \geq 0.$$

Aceasta se rescrie acum ca $a_i^2 + (st)b_i^2 \leq (s+t)a_ib_i$. Prin însumarea acestor relaţii pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ avem

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + (st)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq (s+t)(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n).$$

Din Inegalitatea Mediilor, membrul stâng este cel puţin $2\sqrt{st} \cdot \sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)}$. Astfel, deducem

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq \frac{(s+t)^2}{4st}(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

Astfel, am arătat că $p \leq \frac{(s+t)^2}{4st}$.

Acum, pentru $n = 2$ şi $a_1 = s\sqrt{t}, a_2 = t\sqrt{s}, b_1 = \sqrt{t}, b_2 = \sqrt{s}$. Inegalitatea devine $(ts^2 + t^2s)(t+s) \leq p(st + st)^2$, care duce la $\frac{(s+t)^2}{4st} \leq p$, astfel că minimul căutat este $\frac{(s+t)^2}{4st}$. □

Barem

- (a) Cazul $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ **0.5p**
- Cazul general **1.5p**
- (b) $(t - a_i/b_i)(a_i/b_i - s) \geq 0$ şi însumarea relaţiilor **1p**
- $p \leq \frac{(s+t)^2}{4st}$ **2p**
- $p \geq \frac{(s+t)^2}{4st}$ **2p**

Remarcă: (1) Subpunctul (b) este un fel de reciprocă a inegalităţii CBS. De observat este că o condiţie ca $s \leq \frac{a_i}{b_i} \leq t$ este necesară, căci altfel am putea avea $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 1$, $b_n = 1/a_n$ şi a_n este suficient de mare, ducând la o contradicţie.

(2) Subpunctul (b) devine mai greu dacă n este fixat de la început (şi atunci nu se poate alege $n = 2$ în ultimul pas). În acest caz, pentru n par se poate face alegerea $a_1 = s\sqrt{t}, a_2 = t\sqrt{s}, \ldots, a_{n-1} = s\sqrt{t}, a_n = t\sqrt{s}, b_1 = \sqrt{t}, b_2 = \sqrt{s}, \ldots, b_{n-1} = \sqrt{t}, b_n = \sqrt{s}$, iar pentru cazul n impar sunt aceleaşi alegeri (deci alternează între $s\sqrt{t}$ şi $t\sqrt{s}$ pentru a_i şi $\sqrt{s}$ şi $\sqrt{t}$ pentru b_i) cu excepţia că $a_n = \sqrt{st}b_n$ şi apoi se ia limita $b_n \to 0$.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a XI-a
27.10.2023

SUBIECTUL I

(a) Fie $a = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Arătaţi că $a^3 + 6a$ este număr natural.

(b) Fie z_1, z_2, z_3 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $z^3 + 24z - 16 = 0$. Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ puncte în planul complex şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că

$$GA + GB + GC > 6\sqrt[3]{2}.$$

SUBIECTUL II

Pentru un număr real $b > \frac{1}{2}$, fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = bx + \frac{1}{x}$.

(a) Pentru ce valori ale lui b ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie $x > 0$?

(b) Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale definit prin $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \geq 0$. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ în funcţie de valorile parametrilor $a > 0$ şi $b > \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

Pentru un număr natural nenul n, considerăm o funcţie $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât pentru orice submulţime nenulă şi proprie A a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, există $k \in A$ cu $f(k) \notin A$.

(a) Să se demonstreze că f este o permutare.

(b) Câte permutări satisfac această proprietate?

SUBIECTUL IV

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel încât $a_1 - a_0 \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$.

(a) Să se demonstreze că există $s \in \mathbb{N}$ şi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq sn + t$.

(b) Presupunem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul $(mn - a_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior. Definim un alt şir $(b_n)_{n\geq 0}$ prin

$$b_n = \sup\{mn - a_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Să se demonstreze că şirul $(m - b_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior şi $a_1 = \sup\{m - b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Notă: Pentru o mulţime de numere reale A nevidă şi mărginită superior, $\sup A$ este cea mai mică margine superioară a mulţimii A.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru efectiv este de 3 ore.

Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

SUCCES!

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a XI-a
27.10.2023
Barem

SUBIECTUL I

(a) Fie $a = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Arătaţi că $a^3 + 6a$ este număr natural.

(b) Fie z_1, z_2, z_3 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $z^3 + 24z - 16 = 0$. Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ puncte în planul complex şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că $GA + GB + GC > 6\sqrt[3]{2}$.

Cezar Apostolescu, GMB

SOLUŢIA 1. (a) Fie $x = \sqrt[3]{4}$ şi $y = \sqrt[3]{2}$. Atunci $a = x - y$ şi $x^3 - y^3 = 2$ iar $xy = \sqrt[3]{8} = 2$. Dar acum avem $a^3 = (x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 2 - 6a$ de unde $a^3 + 6a = 2$ este număr natural. Evident, acest subpunct se poate rezolva prin calcul direct de asemenea.

(b) Observăm că $z_1/2, z_2/2, z_3/2$ sunt soluţiile ecuaţiei $(2z)^3 + 24(2z) - 16 = 0$, care devine exact $z^3 + 6z - 2 = 0$. Una dintre soluţii este a, conform subpunctului (a). Atunci, putem factoriza

$$z^3 + 6z - 2 = (z - a)(z^2 + uz + v),$$

unde $u, v \in \mathbb{R}$. Identificând coeficienţii termenilor z^2 şi z, se ajunge la $u = a, v = a^2 + 6$. Astfel, soluţiile ecuaţiei sunt a şi cele două soluţii ale ecuaţiei $z^2 + az + a^2 + 6 = 0$, adică $\frac{-a \pm i\sqrt{3a^2+24}}{2}$. Deci, soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt $2a, -a \pm i\sqrt{3a^2 + 24}$. De aici rezultă că $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, de unde $g = 0$, unde g este afixul lui G. Astfel, avem

$$\begin{aligned} GA + GB + GC &= |g - z_1| + |g - z_2| + |g - z_3| \\ &= |z_1| + |z_2| + |z_3| \\ &= 2a + \sqrt{a^2 + (3a^2 + 24)} + \sqrt{a^2 + (3a^2 + 24)} \\ &= 2a + 4\sqrt{a^2 + 6}. \end{aligned}$$

Pentru a concluziona, arătăm că $a + 2\sqrt{a^2 + 6} > 3\sqrt[3]{2}$. Din Inegalitatea Mediilor:

$$a + 2\sqrt{a^2 + 6} = a + \sqrt{a^2 + 6} + \sqrt{a^2 + 6} \geq 3\sqrt[3]{a(a^2 + 6)} = 3\sqrt[3]{2}.$$

De fapt, inegalitatea este strictă, deoarece $a = \sqrt{a^2 + 6}$ nu este posibil pentru niciun $a \in \mathbb{R}$. $\square$

SOLUŢIA 2 (pentru (b)). (b) Deoarece z_1, z_2 şi z_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $z^3 + 24z - 16 = 0$, avem $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + 24z - 16$. Prin identificarea coeficienţilor obţinem $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ şi $z_1 z_2 z_3 = 16$ (care sunt de fapt relaţiile lui Viète).

Acum, dacă g e afixul lui G, atunci $g = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$ şi, folosind Inegalitatea Mediilor, avem

$$\begin{aligned} GA + GB + GC &= |g - z_1| + |g - z_2| + |g - z_3| \\ &= |z_1| + |z_2| + |z_3| \\ &\geq 3\sqrt[3]{|z_1 z_2 z_3|} \\ &= 3\sqrt[3]{16} \\ &= 6\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Ramâne de demonstrat că inegalitatea este strictă. Inegalitatea nu este strictă în cazul în care $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Obţinem astfel $|z_i| = 2\sqrt[3]{2}$. Ca în soluţia 1, observăm că $2a$ este soluţie a ecuaţiei, deci am obţine $2a = 2\sqrt[3]{2}$, o contradicţie. $\square$

Barem

- (a) **2p**
- (b) Determinarea radacinilor/ sumei si produsului **2p**
- $g = 0$ **1p**
- Aplicarea Inegalităţii Mediilor **1p**
- Explicaţie inegalitate strictă **1p**

Remarcă! Valoarea expresiei $GA + GB + GC$ este $a + 2\sqrt{a^2 + 6}$, care este aproximativ $5,27$, pe când $3\sqrt[3]{2}$ este aproximativ $3,78$. Astfel, inegalitatea se poate îmbunătăţi.

SUBIECTUL II

Pentru un număr real $b > \frac{1}{2}$, fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = bx + \frac{1}{x}$.

(a) Pentru ce valori ale lui b ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie $x > 0$?

(b) Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale definit prin $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \geq 0$. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n \geq 0}$ în funcţie de valorile parametrilor $a > 0$ şi $b > \frac{1}{2}$.

Bogdan Blaga

SOLUŢIE. (a) Ecuaţia $f(x) = x$ se rescrie echivalent ca $(1-b)x^2 = 1$. Este necesar ca $b < 1$, iar în acest caz soluţia este $x = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$.

(b) Observăm ca şirul este strict pozitiv. Dacă $b \geq 1$, atunci avem $x_{n+1} \geq x_n$ şi astfel şirul este crescător, deci monoton. Dacă şirul ar fi mărginit superior, atunci ar exista $M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \geq 0$, $x_n \leq M$. De aici am obţine $x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{M}$ pentru orice $n \geq 0$. Prin inducţie putem deduce că $x_n > a + \frac{n}{M}$, care contrazice faptul că $(x_n)_{n \geq 0}$ e mărginit. Astfel, şirul e nemărginit pentru $b \geq 1$.

Acum, pentru $\frac{1}{2} < b < 1$, facem următoarele observaţii:

1. Deoarece $b > \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{1-b}}{b} < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$.
2. Pentru $0 < x < \frac{\sqrt{1-b}}{b}$ sau $x > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, $f(x) > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$.
3. Pentru $x = \frac{\sqrt{1-b}}{b}$ şi $x = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$.
4. Pentru $\frac{\sqrt{1-b}}{b} < x < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, $f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$.
5. Pentru $x > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, $f(x) < x$, iar pentru $0 < x < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, $f(x) > x$.

Observaţiile 2, 3 şi 4 provin din faptul că

$$f(x) - \frac{1}{\sqrt{1-b}} = \frac{b\sqrt{1-b}x^2 - x + \sqrt{1-b}}{x\sqrt{1-b}} = \frac{b\left(x - \frac{1}{\sqrt{1-b}}\right)\left(x - \frac{\sqrt{1-b}}{b}\right)}{x};$$

iar observaţia 5 se poate demonstra similar cu (a).

Astfel, analizăm următoarele cazuri:

- Dacă $x_0 = a = \frac{\sqrt{1-b}}{b}$, atunci $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este constant. Din obeservaţia 1, $x_0 < x_1$, deci şirul este crescător (deci monoton) şi mărginit.
- Dacă $x_0 = a = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, atunci şirul este constant, deci monoton şi mărginit.
- Dacă $x_0 = a > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, aplicând inductiv observaţia 5, rezultă că şirul este descrescător, deci monoton. Cum şirul este strict pozitiv, acesta va fi şi mărginit.
- Dacă $\frac{\sqrt{1-b}}{b} < x_0 = a < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$, atunci folosind observaţiile 4 şi 5 inductiv obţinem că şirul este mărginit în $\left(\frac{\sqrt{1-b}}{b}, \frac{1}{\sqrt{1-b}}\right)$ şi crescător.
- Dacă $0 < x_0 = a < \frac{\sqrt{1-b}}{b}$, atunci $x_1 = f(x_0) > \frac{1}{\sqrt{1-b}} > \frac{\sqrt{1-b}}{b} = x_0$, folosind observaţiile 2 şi 1. Dar, cum $x_1 > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ şi $x_2 = f(x_1)$, folosind observaţia 5 inductiv rezultă că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător. Fiind pozitiv, $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deci şi $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Dar, dupa cum am arătat, $x_1 > x_0$ şi $x_1 > x_2$, deci şirul nu este monoton.

Astfel, concluzionăm că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este

- mărginit pentru $\frac{1}{2} < b < 1$ şi orice $a > 0$,
- monoton pentru $b \geq 1$, sau $\frac{1}{2} < b < 1$ şi $a \geq \frac{\sqrt{1-b}}{b}$.

$\square$

Barem

- (a) **1p**
- $b \geq 1$ implică x_n crescător **1p**
- $b \geq 1$ şirul e nemărginit **1p**
- Cazurile $a = \frac{\sqrt{1-b}}{b}$ şi $a = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ ..... $\mathbf{2 \times 0.5p}$
- Cazul $a > \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ **1p**
- Cazul $\frac{\sqrt{1-b}}{b} < a < \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ **1p**
- Cazul $a < \frac{\sqrt{1-b}}{b}$ **1p**

Remarcă: (1) Cazul $0 < b \leq \frac{1}{2}$ se poate analiza analog dar este mai complicat. Se obţine că este mărginit şi este monoton dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{1-b}}$ sau $a = \frac{\sqrt{1-b}}{b}$.

(2) Pentru cazul $b < 1$ (inclusiv $b \leq \frac{1}{2}$) se poate arăta altfel că şirul e mărginit. În primul rând, din inegalitatea mediilor avem că $x_n \geq 2\sqrt{b}$ pentru orice $n \geq 1$ deci $x_n \leq bx_{n-1} + \frac{1}{2\sqrt{b}}$. Iterând această inegalitate obţinem

$$x_n \leq b^{n-1}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{b}}(1 + b + \cdots + b^{n-2}) = b^{n-1}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{1 - b^{n-1}}{1 - b},$$

ceea ce arată că x_n e mărginit.

(3) Calitativ, problema scoate în evidenţă fenomenul des întâlnit în analiza matematică că înmulţirea repetată cu $b > 1$ duce la creştere exponenţială iar înmulţirea cu $b < 1$ duce la o micşorare.

SUBIECTUL III Pentru un număr natural nenul n, considerăm o funcţie $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât pentru orice submulţime nenulă şi proprie A a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, există $k \in A$ cu $f(k) \notin A$.

(a) Să se demonstreze că f este o permutare.

(b) Câte permutări satisfac această proprietate?

Alex Buna-Mărginean

SOLUŢIA 1. (a) Vom nota cu $[n] := \{1, \ldots, n\}$, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, şi $f^{(i)}$ este compusa lui f cu ea însăşi de i ori.

Deoarece $[n]$ este şi domeniul şi codomeniul funcţie f, este suficient să demonstrăm că f este surjectivă, adică $f([n]) = [n]$.

Presupunem că $f([n]) \neq [n]$. Evident $f([n]) \neq \emptyset$. Alegând atunci $A = f([n])$ în condiţia din ipoteză, există $k \in f([n])$ astfel încât $f(k) \notin f([n])$. Acest lucru este evident o contradicţie.

(b) Deoarece f este bijectivă, condiţia din ipoteză devine $f(A) \neq A$ pentru orice $A \subsetneq [n]$ şi $A \neq \emptyset$.

Considerăm şirul de lungime n

$$1, f(1), f(f(1)), \ldots, f^{(n-1)}(1).$$

Presupunem că nu toate elementele lui $[n]$ apar în acest şir. Atunci, acesta conţine o repetiţie. Fie prima repetiţie $f^{(i)}(1) = f^{(j)}(1)$ cu $0 \leq i < j \leq n-1$. Cum f este bijectivă, rezultă că $f^{(j-i)}(1) = 1$. Mulţimea $A = \{1, f(1), \ldots, f^{(j-i-1)}(1)\}$ are cardinalul $j - i < n$, deci $A \neq [n]$ şi evident $A \neq \emptyset$. Conform condiţiei din ipoteză $f(A) \neq A$. Totodată,

$$f(A) = \{f(1), f^{(2)}(1), \ldots, f^{(j-i-1)}(1), f^{(j-i)}(1)\} = \{f(1), f^{(2)}(1), \ldots, f^{(j-i-1)}(1), 1\} = A,$$

o contradicţie. Astfel, este necesar ca $\{1, f(1), f(f(1)), \ldots, f^{(n-1)}(1)\} = [n]$.

Demonstrăm că orice astfel de funcţie verifică ipoteza. Fie $A \subsetneq [n]$ cu $A \neq \emptyset$. Atunci, cum $[n] = \{1, f(1), f(f(1)), \ldots, f^{(n-1)}(1)\}$, există un $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel încât $f^{(k)}(1) \notin A$ şi $f^{(k-1)}(1) \in A$ (unde, pentru $k = 0$, $f^{(-1)} := f^{(n-1)}$). Dar, cum $f(f^{(k-1)}(1)) = f^{(k)}(1)$, obţinem $f(A) \neq A$.

În cele din urmă, demonstrăm ca pentru orice permutare τ ale numerelor $2, 3, \ldots, n$ (în număr de $(n-1)!$ în total), putem construi o funcţie f astfel încât $f(1) = \tau(2), f(f(1)) = \tau(3), \ldots, f^{(n-1)}(1) = \tau(n)$. Acest lucru ne va permite să concluzionăm că $(n-1)!$ funcţii satisfac proprietatea din ipoteză. Deja am stabilit că $f(1) = \tau(2)$. Mai departe, pentru a determina $f(k)$, unde $2 \leq k \leq n$, fie $i = \tau^{-1}(k)$. Presupunem pentru moment că $i \neq n$. Atunci, $k = \tau(i) = f^{(i-1)}(1)$ şi aplicând f obţinem $f(k) = f^{(i)}(1) = \tau(i+1) = \tau(\tau^{-1}(k) + 1)$. Dacă $\tau^{-1}(k) = n$, atunci pentru acest k avem $f(k) = 1$, deoarece toate celelalte $n-1$ valori din codomeniul lui f au fost atribuite. $\square$

SOLUŢIA 2 (pentru (b)). Vom folosi următoarea teoremă:

Teoremă. Orice permutare $\sigma \in S_n$ se poate scrie ca un produs de cicli disjuncţi $f = c_1 \cdots c_k$.

Aici, un ciclu c de lungime m este o permutare pentru care există $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset [n]$ astfel încât $c(k) = k$ pentru $k \notin I$ şi $c(i_1) = i_2, c(i_2) = i_3, \ldots c(i_{m-1}) = i_m, c(i_m) = i_1$. De exemplu, un ciclu de lungime 2 este o transpoziţie. Dacă I şi J corespund ciclilor c_1 şi c_2 atunci spunem că c_1 şi c_2 sunt disjuncţi dacă $I \cap J = \emptyset$.

Fie acum $f = c_1 \cdots c_k$. Dacă există un ciclu c_i cu lungimea mai mică decât n, considerăm A ca fiind formată din elementele ciclului c_i. Atunci, $A \neq \emptyset$ şi $A \neq [n]$, dar $f(A) = A$, o contradicţie. Astfel, f este de fapt un ciclu de lungime n şi se poate verifica la fel ca în Soluţia 1 că condiţia din ipoteză este satisfăcută.

Există $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ astfel de cicluri deoarece sunt $n!$ moduri de a aranja numerele $1, 2, \ldots, n$, iar apoi sunt n astfel de aranjamente care de fapt reprezintă acelaşi ciclu. $\square$

Barem

- (a) $f([n]) = [n]$ este necesar şi suficient **1p**

- Demonstraţia că $f([n]) = [n]$ **1p**
- (b) Forma necesară pentru f **2p**
- Orice astfel de f verifică condiţia **1p**
- Numărul de funcţii este $(n-1)!$ **2p**

SUBIECTUL IV

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel încât $a_1 - a_0 \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$.

(a) Să se demonstreze că există $s \in \mathbb{N}$ şi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq sn + t$.

(b) Presupunem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul $(mn - a_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior. Definim un alt şir $(b_n)_{n\geq 0}$ prin

$$b_n = \sup\{mn - a_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Să se demonstreze că şirul $(m - b_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior şi $a_1 = \sup\{m - b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Notă: Pentru o mulţime de numere reale A nevidă şi mărginită superior, $\sup A$ este cea mai mică margine superioară a mulţimii A.

Alex Buna-Mărginean

SOLUŢIE. (a) Pentru $n = 0$, este suficient să luăm $t = a_0 \in \mathbb{R}$. Pentru $n = 1$, obţinem $a_1 \geq s + t$, deci putem considera $s = a_1 - a_0 \in \mathbb{N}$. Acum folosim inducţie. Am acoperit caz(urile) de bază. Presupunem că $a_n \geq (a_1 - a_0)n + a_0$. Prin folosirea repetată a inegalităţii din ipoteză, $a_{n+1} - a_n \geq a_1 - a_0$, deci $a_{n+1} \geq (n+1)(a_1 - a_0) + a_0$.

(b) Pentru orice $m \geq 0$, folosind $\sup(-A) = -\inf A$:

$$m - b_m = m - \sup_{k\in\mathbb{N}}(km - a_k) = m + \inf_{k\in\mathbb{N}}(a_k - km) \leq m + a_1 - m = a_1,$$

deci şirul $(m - b_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior de a_1.

Pentru orice $n \geq 0$, inegalitatea de la (a) se poate rearanja ca $-t \geq sn - a_n$. Deoarece relaţia precedentă are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă ca $-t$ este un majorant pentru $\{sn - a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Astfel,

$$-t \geq \sup\{sn - a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = b_s,$$

deoarece $s \in \mathbb{N}$. De aici obţinem

$$s - b_s \geq t + s = a_1.$$

Dar, după cum am demonstrat anterior, şirul $(m - b_m)_{m\geq 0}$ este mărginit superior de a_1, iar $s - b_s$ este un termen al acestui şir. Astfel, concluzionăm că $a_1 = \sup\{m - b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$. □

Barem

- (a) Determinarea numerelor s şi t **1p**
- $a_n \geq sn + t$ **1p**
- (b) Şirul $(m - b_m)_{m\geq 0}$ e mărginit **1p**
- $-t \geq b_s$ **2p**
- Concluzionare **2p**

Remarcă: Se poate observa o asemănare între aceasta problemă şi Subiectul III de la clasa a XII-a. Acest lucru nu este o coincidenţă. Cele două probleme studiază diferite proprietăţi ale *conjugatului convex*, în contextul problemei de faţă pentru şiruri *convexe* ($a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$). Conjugatul convex (al unei funcţii) este o noţiune fundamentală în analiza funcţiilor convexe, "optimizarea" acestora şi în inteligenţă artificială.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a XII-a
27.10.2023

SUBIECTUL I

Fie $f : \mathbb{R} \to (1, \infty)$ o funcţie derivabilă iar F o primitivă a sa, care verifică relaţia $F(x) = f^2(x) + kf(x) + x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $k > 0$ este o constantă dată.

(a) Studiaţi monotonia lui f.

(b) Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)+xf'(x)}{x}$.

SUBIECTUL II

Considerăm mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2^\ell \end{pmatrix} \;\middle|\; k, \ell \in \mathbb{N}, k < 2^\ell \right\}$.

(a) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi să se studieze proprietăţile acesteia (asociativitate, comutativitate, existenţa unui element neutru şi ce elemente admit simetrice).

(b) Să se demonstreze că există $A_0, A_1 \in M$ astfel încât orice $A \in M \setminus \{I_2\}$ se poate scrie ca un produs $X_1 X_2 \cdots X_n$, unde $n \geq 1$ şi $X_i \in \{A_0, A_1\}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

SUBIECTUL III

Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu $f_1(0) = f_2(0) = 0$, derivabile, cu $f_1'(x) > 0$ şi $f_2'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, inversabile şi primitivabile, cu primitive $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Să se demonstreze că funcţia $F_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F_1^*(y) = \max_{x\in\mathbb{R}}(yx - F_1(x)),$$

satisface $F_1^*(0) = -F_1(0)$ şi este o primitivă a funcţie f_1^{-1}.

(b) Presupunem ca $F_1(0) = F_2(0)$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) \leq F_2(x)$. Fie $G_1, G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două primitive ale funcţiilor f_1^{-1} şi f_2^{-1}, respectiv, cu $G_1(0) \geq G_2(0)$. Să se demonstreze că pentru orice $y \in \mathbb{R}$, $G_1(y) \geq G_2(y)$.

SUBIECTUL IV

Fie A o mulţime cu cel puţin două elemente şi „$\cdot$“ o operaţie binară pe A cu proprietatea că există $a, b \in A$ astfel încât

$$(a \cdot x) \cdot y = x,$$
$$((b \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z),$$

pentru orice $x, y, z \in A$. Fie $e = (b \cdot a) \cdot a$. Arătaţi că:

(a) e este element neutru la stânga, dar „$\cdot$“ nu admite element neutru la dreapta.

(b) Operaţia „$\cdot$“ este necomutativă şi neasociativă.

(c) Mulţimea A este infinită.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru efectiv este de 3 ore.

Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

SUCCES!

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ALEXANDRU PAPIU ILARIAN“
EDIŢIA a XXVI-a
CLASA a XII-a
27.10.2023
Barem

SUBIECTUL I

Fie $f : \mathbb{R} \to (1, \infty)$ o funcţie derivabilă iar F o primitivă a sa, care verifică relaţia $F(x) = f^2(x) + kf(x) + x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $k > 0$ este o constantă dată.

(a) Studiaţi monotonia lui f.

(b) Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)+xf'(x)}{x}$.

Cristian Moanţă, GMB

SOLUŢIE. (a) Derivând relaţia din ipoteză, obţinem $f(x) = 2f(x)f'(x) + kf'(x) + 1$, adică

$$f'(x) = \frac{f(x) - 1}{2f(x) + k}.$$

Deoarece $f(x) > 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă ca $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare.

(b) Demonstrăm mai întâi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Deoarece f este strict crescătoare, aceasta fie este mărginită superior de un $M > 1$, fie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Presupunem prin reducere la absurd că $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece f este strict crescătoare, $M \geq f(x) > f(0)$ pentru orice $x > 0$. Atunci, pentru $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{f(x) - 1}{2f(x) + k} > \frac{f(0) - 1}{2f(x) + k} \geq \frac{f(0) - 1}{2M + k}.$$

Fie acum $x > 0$ arbitrar. Atunci, din Teorema lui Lagrange, există $\xi \in (0, x)$ astfel încât $f(x) = f(0) + xf'(\xi)$, deci

$$f(x) > f(0) + \frac{f(0) - 1}{2M + k} \cdot x.$$

Inegalitatea precedentă are loc pentru orice $x > 0$. Luând $x = \frac{M(2M+k)}{f(0)-1} > 0$, obţinem $f(x) > f(0) + M > 1 + M$, o contradicţie.

Astfel, funcţia f este strict crescătoare şi nemărginită superior, de unde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Mai departe, putem aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - 1}{2f(x) + k} = \frac{1}{2}.$$

Astfel,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) + xf'(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + f'(x) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

□

Barem

- (a) Derivarea relației din ipoteză **1p**
- Expresia pentru f' este pozitivă **1p**
- (b) Demonstrație $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **2p**
- Calculul $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ **2p**
- Rezultatul final **1p**

SUBIECTUL II

Considerăm mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2^\ell \end{pmatrix} \middle| \, k, \ell \in \mathbb{N}, k < 2^\ell \right\}$.

(a) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi să se studieze proprietăţile acesteia (asociativitate, comutativitate, existenţa unui element neutru şi ce elemente admit simetrice).

(b) Să se demonstreze că există $A_0, A_1 \in M$ astfel încât orice $A \in M \setminus \{I_2\}$ se poate scrie ca un produs $X_1 X_2 \cdots X_n$, unde $n \geq 1$ şi $X_i \in \{A_0, A_1\}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

(***)

SOLUŢIE. (a) Pentru $i \in \{1, 2\}$, fie $B_i = \begin{pmatrix} 1 & k_i \\ 0 & 2^{\ell_i} \end{pmatrix}$ cu $k_i < 2^{\ell_i}$. Atunci, $B_1 B_2 = \begin{pmatrix} 1 & k_2 + k_1 2^{\ell_1} \\ 0 & 2^{\ell_1 + \ell_2} \end{pmatrix}$, care este in M dacă şi numai dacă $k_2 + k_1 2^{\ell_2} < 2^{\ell_1 + \ell_2}$. Echivalent $k_2 < 2^{\ell_2}(2^{\ell_1} - k_1)$, care este adevărat.

Evident înmulţirea este asociativă pe M şi $I_2 \in M$ este element neutru. Totuşi, nu este comutativă deoarece

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Înafară de I_2, niciun element nu are simetric. Într-adevăr, considerând B_1 şi B_2 ca mai sus, din $B_1 B_2 = I_2$ rezultă că $2^{\ell_1 + \ell_2} = 1$, deci $\ell_1 = \ell_2 = 0$ şi mai departe $k_1 = k_2 = 0$, adică $B_1 = B_2 = I_2$.

(b) Pentru $i \in \{0, 1\}$, fie $A_i = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M$. Demonstrăm ca orice $B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2^\ell \end{pmatrix} \in M$ (deci cu $k < 2^\ell$) se poate scrie ca un produs în care toţi termenii sunt A_0 sau A_1.

Se poate demonstra uşor prin inducţie că, pentru orice $n \geq 1$ şi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$,

$$A_{a_{n-1}} \ldots A_{a_1} A_{a_0} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(2)} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

unde permitem reprezentarea binară să înceapă cu 0. Astfel, putem să scriem matricea B ca un produs de matrice A_0, A_1 în felul următor: scriem k în baza 2 şi adăugând un număr suficient de 0 la stânga acestei reprezentări astfel încât lungimea reprezentării să fie n, iar apoi alegem matricele A_0, A_1 în mod corespunzător. Deoarece $k < 2^\ell$, reprezentarea binară a lui k are cel mult ℓ cifre, deci procedura precedentă este validă. □

Barem

- Parte stabilă **1p**
- Asociativitate, comutativitate, element neutru, simetrice ..... **4 × 0.5p**
- Identificarea A_0, A_1 ..... **1p**
- Forma produsului **1p**
- Demonstraţia posibilităţii scrierii **2p**

SUBIECTUL III Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu $f_1(0) = f_2(0) = 0$, derivabile, cu $f_1'(x) > 0$ şi $f_2'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, inversabile şi primitivabile, cu primitive $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Să se demonstreze că funcţia $F_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F_1^*(y) = \max_{x \in \mathbb{R}}(yx - F_1(x)),$$

satisface $F_1^*(0) = -F_1(0)$ şi este o primitivă a funcţie f_1^{-1}.

(b) Presupunem ca $F_1(0) = F_2(0)$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) \leq F_2(x)$. Fie $G_1, G_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două primitive ale funcţiilor f_1^{-1} şi f_2^{-1}, respectiv, cu $G_1(0) \geq G_2(0)$. Să se demonstreze că pentru orice $y \in \mathbb{R}$, $G_1(y) \geq G_2(y)$.

(***)

SOLUŢIE. (a) Observăm că $F_1^*(0) = \max_{x \in \mathbb{R}}(-F_1(x))$. Egalăm derivata funcţiei $-F_1(x)$ cu 0:

$$(-(F_1(x))' = 0 \iff f_1(x) = 0.$$

Deoarece f_1 este strict crescătoare, singura soluţie a acestei ecuaţii este $x = 0$. De asemenea, $(-F_1(x))'' = -f_1'(x) < 0$, deci $x = 0$ este într-adevăr maximul global al funţiei $-F_1(x)$. Astfel, $F_1^*(0) = -F_1(0)$.

In continuare, procedăm in mod similar şi rescriem F_1^* într-o altă formă. Pentru un $y \in \mathbb{R}$ fixat, egalăm derivata funcţiei $x \mapsto yx - F_1(x)$ cu 0:

$$(yx - F_1(x))' = 0 \iff y - f_1(x) = 0 \iff x = f_1^{-1}(y).$$

A doua derivată a acestei funcţii este $(yx - F_1(x))'' = -f_1'(x) < 0$, deci $x = f_1^{-1}(y)$ este într-adevăr maximul global. Astfel, $F_1^*(y) = yf_1^{-1}(y) - F_1(f_1^{-1}(y))$ este derivabilă, deoarece f_1^{-1} este derivabilă (cum $f_1'(x) \neq 0$). Observăm că F_1^* este o primitivă a funcţie f_1^{-1}:

$$\begin{aligned}
(F_1^*(y))' &= (yf_1^{-1}(y) - F_1(f_1^{-1}(y)))' \\
&= f_1^{-1}(y) + y(f_1^{-1})'(y) - F_1'(f_1^{-1}(y))(f_1^{-1})'(y) \\
&= f_1^{-1}(y) + y(f_1^{-1})'(y) - f_1(f_1^{-1}(y))(f_1^{-1})'(y) \\
&= f_1^{-1}(y).
\end{aligned}$$

(b) Definind în mod analog $F_2^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_2^*(y) = \max_{x \in \mathbb{R}}(yx - F_2(x)),$$

rezultă că $G_1(y) = F_1^*(y) + c_1$ şi $G_2(y) = F_1^*(y) + c_2$, pentru nişte constante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mai mult, din $G_1(0) \geq G_2(0)$ şi $F_1^*(0) = -F_1(0) = -F_2(0) = F_2^*(0)$, obţinem $c_1 \geq c_2$. Astfel, pentru $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G_1(y) &= c_1 + F_1^*(y) \\
&\geq c_2 + F_1^*(y) \\
&= c_2 + \max_{x \in \mathbb{R}}(yx - F_1(x)) \\
&\geq c_2 + \max_{x \in \mathbb{R}}(yx - F_2(x)) \\
&= c_2 + F_2^*(y) \\
&= G_2(y),
\end{aligned}$$

unde prima inegalitate foloseşte $c_1 \geq c_2$ şi a doua inegalitate foloseşte $F_1(x) \leq F_2(x)$. □

Barem

- (a) $(-F_1(x))' = 0$ **0.5p**

- Argumentarea că $x = 0$ este maxim global **0.5p**
- $F_1^*(0) = -F_1(0)$ **0.5p**
- $(xy - F_1(x))' = 0$ **0.5p**
- Argumentarea că $x = f^{-1}(y)$ este maxim global **0.5p**
- $F_1^*(y) = yf_1^{-1}(y) - F_1(f_1^{-1}(y))$ **0.5p**
- Argumentarea că $F_1^*(y)$ este derivabilă **0.5p**
- $(F_1^*(y))' = f_1^{-1}(y)$ **0.5p**
- Definirea F_2^*, c_1, c_2 ..... **1p**
- $c_1 \geq c_2$ **1p**
- Concluzia **1p**

Notă: Pentru (b), soluţii informale bazate pe intuiţie geometrică, ce folosesc integrale definite şi aria de "sub" grafic, vor fi punctate cu maxim 1 punct. De fapt, soluţia de la (b) este formalizarea acestei intuiţii geometrice.

Remarcă: Se poate observa o asemănare între aceasta problemă şi Subiectul IV de la clasa a XI-a. Acest lucru nu este o coincidenţă. Cele două probleme studiază diferite proprietăţi ale *conjugatului convex*, în contextul problemei de faţă pentru funţii convexe. Conjugatul convex (al unei funcţii) este o noţiune fundamentală în analiza funcţiilor convexe, "optimizarea" acestora şi în inteligenţă artificială.

SUBIECTUL IV Fie A o mulțime cu cel puțin două elemente și „$\cdot$" o operație binară pe A cu proprietatea că există $a, b \in A$ astfel încât

$$(a \cdot x) \cdot y = x,$$
$$((b \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z),$$

pentru orice $x, y, z \in A$. Fie $e = (b \cdot a) \cdot a$. Arătați că:

(a) e este element neutru la stânga, dar „$\cdot$" nu admite element neutru la dreapta.

(b) Operația „$\cdot$" este necomutativă și neasociativă.

(c) Mulțimea A este infinită.

Bogdan Blaga

SOLUȚIE. Pentru a simplifica notația, notăm $x \cdot y$ cu xy. Relațiile din ipoteză se rescriu astfel $(ax)y = x$ și $((bx)y)z = (xz)(yz)$.

(a) Pentru $x \in A$ obținem
$$ex = ((ba)a)x = (ax)(ax) = x.$$

Acum, dacă ar exista un element neutru la dreapta, e', atunci am avea $ee' = e$, dar și $ee' = e'$ deoarece e este element neutru la stânga, astfel că $e' = e$. Atunci $xe = x$ pentru orice $x \in A$. Deci, $ae = a$, de unde $((ae)x)e = (ax)e$, care devine $ee = x$. Astfel, $e = x$ pentru orice $x \in A$, contrazicând faptul ca A are cel puțin două elemente.

(b) Presupunem prin absurd că operați „$\cdot$" ar fi comutativă. Atunci am avea $ea = ae$. Dar din (a) deducem atunci că $a = ae$. De aici, pentru orice $x, y \in A$, avem $x = (ax)y = ((ae)x)y = ey = y$, contradicție.

Dacă operația „$\cdot$" ar fi asociativă, am avea $(ae)e = a(ee)$. Atunci, $e = (ae)e = a(ee) = ae$. Deci, pentru orice $x \in A$, avem $x = ex = (ae)x = e$. Astfel, se deduce din nou că A are un singur element, contradicție.

(c) Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de elemente din A definit prin $x_1 = ae$ și $x_{n+1} = ax_n$. Pentru orice $n \geq 1$, se demonstrează prin inducție după n că $(\underbrace{((x_n e)e) \cdots e)}_{k \text{ ori}} x = x$ dacă $k \geq n$ și $(\underbrace{((x_n e)e) \cdots e)}_{k \text{ ori}} x = e$ dacă $k = n - 1$, pentru orice $x \in A$.

Acum, dacă A ar fi finită, ar exista $n, m \geq 1$ astfel încât $x_n = x_{n+m}$. Ca urmare,

$$x = (\underbrace{((x_n e)e) \cdots e)}_{n+m-1 \text{ ori}} e x = (\underbrace{((x_{n+m} e)e) \cdots e)}_{n+m-1 \text{ ori}} x = e$$

pentru orice x, contradicție. □

Barem

- e e element neutru la stânga **1p**
- $e' = e$ **1p**
- e nu e element neutru la dreapta **1p**
- necomutativitate **1p**
- neasociativitate **1p**
- Șirul x_n și proprietatea sa **1p**
- $x_n \neq x_{n+m}$ **1p**

Remarcă: Problema provine din Lambda Calculus, o ramură a informaticii teoretice care încearcă să formalizeze noţiunea de "calculare" şi de "calculator". Ce înseamnă acest lucru? De exemplu, ca să putem vorbi de orice calcule ar trebui să putem vorbi despre numere şi începutul ar fi cu numerele naturale. Numerele naturale există în Lambda Calculus - sunt chiar termenii x_n din subpunctul (c) (unde luăm $x_0 = e$)! Ca să scoatem şi mai mult în evidenţă acest lucru, există un mod de a defini adunarea a două "numere". Puteţi încerca să demonstraţi următoarele:

Fie $r = b(ab)a$, $c = b((rr)b)(aa)$ şi $t = c((ba)a)$. Dacă definim p (de la plus) ca fiind $p = t(br)$, atunci $(px_n)x_m = x_{n+m}$ pentru orice $n, m \geq 0$ deci am definit adunarea în Lambda Calculus!

Pentru o introducere elementară în aceste noţiuni recomandăm cartea *To Mock a Mockingbird* de Raymond Smullyan.