CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXVIII-a
CLASA a V-a
18.10.2025

Problema 1. Pe un ecran este scris numărul 25. După fiecare minut, în locul numărului existent se scrie un număr cu 25 mai mare decât produsul cifrelor sale.

a) Aflaţi ce număr va fi scris pe ecran după 3 minute.

b) Aflaţi ce număr va fi scris pe ecran după 2025 de minute.

Rezolvare. a) După un minut va fi scris numărul $2 \cdot 5 + 25 = 35$. După două minute va fi scris numărul $3 \cdot 5 + 25 = 40$. După trei minute va fi scris numărul $4 \cdot 0 + 25 = 25$.

b) După 4 minute va fi scris numărul $2 \cdot 5 + 25 = 35$. Observăm că numărul scris pe ecran se repetă din 3 în 3 minute. Cum $2025 : 3 = 675$, rest 0, rezultă că numărul scris pe ecran după 2025 de minute este 25.

Acordare punctajului:

- 2 p - obţinerea numărului după 3 minute;
- 2 p - observare repetabilitărtii numărului după 3 minute;
- 2 p - găsirea restului la împărţirea lui 2025 la 3;
- 1 p - aflarea numărului final.

Problema 2. Produsul a 25 de numere naturale este 24. Află toate valorile posibile ale sumei factorilor.

Rezolvare. Deoarece $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 8 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 4 \cdot 3$, avem variantele:

1) $24 = 1 \cdot 24 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{24 \text{ de } 1} \cdot 24$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{24 \text{ de } 1} + 24 = 24 + 24 = 48.$$

2) $24 = 2 \cdot 12 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{23 \text{ de } 1} \cdot 2 \cdot 12$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{23 \text{ de } 1} + 2 + 12 = 23 + 2 + 12 = 37.$$

3) $24 = 4 \cdot 6 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{23 \text{ de } 1} \cdot 4 \cdot 6$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{23 \text{ de } 1} + 4 + 6 = 23 + 4 + 6 = 33.$$

4) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{22 \text{ de } 1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{22 \text{ de } 1} + 2 + 2 + 6 = 32.$$

5) $24 = 8 \cdot 3 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{23 \text{ de } 1} \cdot 8 \cdot 3$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{23 \text{ de } 1} + 8 + 3 = 34.$$

6) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{21 \text{ de } 1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{21 \text{ de } 1} + 2 + 2 + 2 + 3 = 30.$$

7) $24 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{22 \text{ de } 1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$ şi atunci suma factorilor este

$$\underbrace{1 + 1 + ... \cdot +1}_{22 \text{ de } 1} + 2 + 4 + 3 = 31.$$

Aşadar, valorile posibile ale sumei factorilor sunt: 30, 31, 32, 33, 34, 37 şi 48.

Acordarea punctajului:

- 1 p (din 7 posibile) - determinarea unei sume (din 7 posibile).

Problema 3. Suma a patru numere naturale este 2025. Dacă dublăm primul număr, micşorăm cu 2 al doilea număr, mărim cu 2 al treilea număr şi înjumătăţim al patrulea număr obţinem de fiecare dată acelaşi rezultat. Aflaţi numerele.

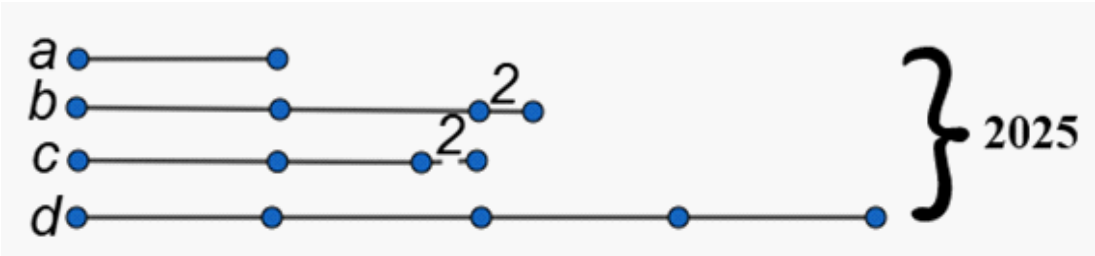
Rezolvare. Avem reprezentarea grafică:

$2025 : 9 = 225 \Longrightarrow a = 225$; $b = 225 \cdot 2 + 2 = 452$; $c = 225 \cdot 2 - 2 = 448$; $d = 225 \cdot 4 = 900$.

Acordare punctajului:

- 3 p - realizează corect reprezentarea grafică;
- 1 p (din 4 posibile) - obţinerea unui număr din cele 4 .

Problema 4. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} + a + b + c = k!$, unde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$.



Rezolvare. Avem $101 \leq \overline{abc} + a + b + c \leq 1026$, de unde $101 \leq k! \leq 1026$, deci $k = 5$ sau $k = 6$.

Pentru $k = 5$, obţinem $\overline{abc} + a + b + c = 120$. Evident $a = 1$ şi atunci $\overline{bc} + b + c = 19$, de unde $b = 1$ şi $c = 4$.

Pentru $k = 6$, obţinem $\overline{abc} + a + b + c = 720$, deci a este cel puţin 6şi cel mult 7.

Dacă $a = 6$, rămâne $\overline{bc} + b + c = 114$, deci b trebuie să fie par, caz în care $\overline{bc} + b + c \leq 89 + 8 + 9 < 114$, deci în acest caz nu există numere.

Dacă $a = 7$, obţinem $b = 1$ şi $c = 1$.

Numerele sunt 114 şi 711.

Punctajul acordat:

- 2 p - justificare alegerii lui $k = 5$ sau 6;
- 2 p - obţinerea numărului pentru $k = 5$;
- 3 p - obţinerea numărului pentru $k = 6$.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXVIII-a
CLASA a VI-a
18.10.2025

Problema 1. Patru numere naturale consecutive se împart succesiv la acelaşi număr natural de trei cifre. Suma resturilor obţinute este egală cu 983. Calculaţi restul împărţirii celui mai mic dintre cele 4 numere la 109.

Rezolvare. Împărţitorul fiind mai mare decât 5 şi numerele fiind consecutive, resturile sunt numere naturale consecutive; aşadar resturile pot fi

1) r, $r+1$, $r+2$, $r+3$;

2) r, $r+1$, $r+2$, 0;

3) r, $r+1$, 0, 1;

4) r, 0, 1, 2.

Cazurile 1), 2) şi 3) sunt imposibile din condiţia suma resturilor este 983.

Cazul 4) Rezultă $r+3=983$, deci $r=980$.

Cum al doilea număr dă restul 0 rezultă că împărţitorul este 981. Atunci primul număr este de forma $981\cdot c+980$. Cum $981\cdot c+980=109\cdot 9\cdot c+109\cdot 8+108=109\,(9\cdot c+8)+108$, deducem că restul împărţirii este 108.

Punctaj:

- 2 p - forma resturilor (0,5 p pentru fiecare formă a restului);

- 3 p - analizarea cazurilor 1), 2) şi 3) - câte un punct pentru fiecare caz analizat corect;

- 1 p - găsirea lui r şi apoi a împărţitorului (0.5 p pentru fiecare);

- 1 p - finalizarea.

Problema 2. Se consideră mulţimea

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{3}{n-2},\ \ldots,\ \frac{n}{1}\right\},\ \text{unde } n\in\mathbb{N},\ n\geq 3.$$

a) Determină mulţimea $A_9\cap\mathbb{N}$.

b) Determină câte elemente are mulţimea $A_{2024}\cap\mathbb{N}$.

Rezolvare. a) Avem

$$A_9=\left\{\frac{1}{9},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{2},\ \frac{9}{1}\right\}\cap\mathbb{N}=\{1,\ 4,\ 9\}.$$

b) Observăm că mulţimea A_{2024} poate fi scrisă sub forma

$$A_{2024} = \left\{ \frac{2025-k}{k} \ : \ k \in \{1, 2, ..., 2024\} \right\}.$$

Avem că $\frac{2025-k}{k} = \frac{2025}{k} - 1 \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $k|2025$. Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ deducem că 2025 are $(4+1)(2+1) = 15$ divizori. Dar cum $k \leq 2024$ rezultă că 2025, care este divizor al lui 2025, nu îndeplineşte condiţia. Rezultă că $A_{2024} \cap \mathbb{N}$ are $15 - 1 = 14$ elemente.

Punctaj:
- 2 p - rezolvarea subpunctului a);
- 2 p - scrierea altfel a lui A_n;
- 1 p - obţinerea lui k - divizor a lui 2025;
- 2 p - finalizarea subpunctului b)

Problema 3. Se consideră numărul $x = 2^m + 4^n$ cu m, $n \in \mathbb{N}$,

a) Arată că pentru $m = 2025$ şi $n = 1011$ numărul x este pătrat perfect.

b) Arată că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un număr natural m astfel încât x să fie pătrat perfect.

Rezolvare. a) Avem

$$x = 2^{2025} + 4^{1011} = 2^{2025} + 2^{2022} = 2^{2022}\left(2^3 + 1\right) = 2^{2022} \cdot 9 = \left(2^{1011} \cdot 3\right)^2.$$

b) Pentru $m = 2n + 3$ avem

$$x = 2^{2n+3} + 2^{2n} = 2^{2n}\left(2^3 + 1\right) = 2^{2n} \cdot 9 = \left(2^n \cdot 3\right)^2.$$

Punctaj:
- 2 p - rezolvarea subpunctului a);
- 3 p - alegerea specială a lui m;
- 2 p - scrierea lui x ca pătrat perfect.

Problema 4. Pe o dreaptă se consideră punctele M_0, M_1, M_2, ..., M_n în această ordine, astfel încât $M_0M_1 = 1$ cm, $M_1M_2 = 3$ cm, $M_2M_3 = 5$ cm, ..., $M_{n-1}M_n = 2n - 1$ cm.

a) Determină lungimea segmentului M_0M_{100}.

b) Determină suma numerelor $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $143 < M_0M_n < 325$.

c) Determină $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât mijlocul segmentului M_0M_{16} să se afle în interiorul segmentului $M_{m-1}M_m$.

Rezolvare. a) $M_0M_{100} = 1 + 3 + 5 + ... + 199 = 100^2 = 10.000$.

b) Din $143 < 144 = 12^2 \leq n^2 \leq 18^2 = 324 < 325$ deducem că $n \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$. Atunci

$$S = 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 105.$$

c) Avem $M_0M_{16} = 1 + 3 + ... + 31 = 16^2 = 256$ şi atunci $M_0M = \frac{256}{2} = 128$.

Cum $(m-1)^2 < 128 < m^2$, obţinem $m = 12$.

Punctaj:

- 1 p - calcularea lui M_0M_{100};
- 2 p - determinarea valorilor posibile pentru n;
- 1 p - calcularea sumei;
- 1 p - calcularea lui M_0M_{16};
- 1 p - determinarea lui M_0M;
- 1 p - obţinerea lui m.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN"
EDIŢIA a XXVIII-a
CLASA a VII-a
18.10.2025

Problema 1. a) Se consideră mulţimea $A = \left\{ \sqrt{2p^2+4p+9} \mid p \in \mathbb{N},\ p \text{ prim} \right\}$. Determinaţi $A \cap \mathbb{Q}$.

b) Fie numerele reale nenule a, b, c astfel încât

$$\frac{b \cdot c}{a} = \frac{1}{7};\quad \frac{a \cdot c}{b} = \frac{1}{11} \quad \text{şi} \quad \frac{a \cdot b}{c} = \frac{1}{3}.$$

Arătaţi că $\sqrt{36a^2 - 3b^2 + 4c^2}$ este un număr natural.

Rezolvare: a) Cazul 1: $p = 2 \Longrightarrow \sqrt{2p^2+4p+9} = 5 \in Q$.

Cazul 2: $p > 2 \Longrightarrow p = 4k+1$ sau $p = 4k+3$.

Dacă $p = 4k+1$, rezultă $2p^2+4p+9 = M_4 + 3 \Longrightarrow \sqrt{2p^2+4p+9} \notin Q$.

Dacă $p = 4k+3$, rezultă $2p^2+4p+9 = M_4 + 3 \Longrightarrow \sqrt{2p^2+4p+9} \notin Q$.

b) Înmulţim membru cu membru relaţiile date; obţinem

$$\frac{a^2b^2c^2}{abc} = \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 3} \text{ şi cum } abc \neq 0, \text{ rezultă } abc = \frac{1}{231}.$$

Acum, din $\frac{bc}{a} = \frac{1}{7}$ deducem $a^2 = \frac{1}{33}$, din $\frac{ac}{b} = \frac{1}{11}$ deducem $b^2 = \frac{1}{21}$, iar din $\frac{ab}{c} = \frac{1}{3}$ deducem $c^2 = \frac{1}{77}$.

Urmează că $36a^2 - 3b^2 + 4c^2 = 1$ şi deci $\sqrt{36a^2 - 3b^2 + 4c^2} = 1 \in Q$.

Acordarea punctajului:

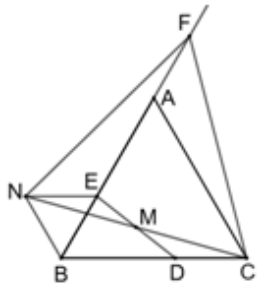
a) - 1 p - cazul $p = 2$;
- 1 p - cazul $p > 2 \Longrightarrow p = 4k+1$ sau $p = 4k+3$;
- 1 p - cazul $p = 4k+1$;
- 1 p - cazul $p = 4k+3$;

b) - 1 p - $231abc = 1$;
- 1 p - obţinerea lui a^2, b^2, c^2;
- 1 p - finalizarea.

Problema 2. Numerele reale a, b, c verifică relaţia

$$\frac{2}{a+b} = \frac{3}{a+c} = \frac{13}{b+c}.$$

a) Demonstraţi că dacă $a \cdot b \cdot c > 0$, atunci $a + b + c < 0$.



b) Dacă în plus avem $a{\cdot}b+a{\cdot}c+b{\cdot}c=-2025$, calculaţi $(|a+b+c|-406)^{2025}$.

Rezolvare: a) Avem $\frac{2}{a+b}=\frac{3}{a+c}=\frac{13}{b+c}=\frac{2a+2b+2c}{18}=k$, deci $a+b+c=9k$.

Din $a+b=2k$ deducem $c=7k$, din $b+c=13k$ deducem $b=6k$ şi apoi $a=-4k$.

Dar $abc>0$ şi atunci $k<0$. Urmează că $a+b+c=9k<0$.

b) Dacă $ab+ac+bc=-20250$, atunci $-24k^2-28k^2+42k^2=20250$ şi deci $k^2=45^2$. Cum $k<0$, obţinem $k=-45$ şi deci $a+b+c=-405$.

Atunci $(|a+b+c|-406)^{2025}=(405-406)^{2025}=-1$.

Acordarea punctajului:

a) - 1 p - $a+b+c=9k$;

- 1 p - $a=-4k$, $b=6k$, $c=7k$;
- 2 p - $k<0$ şi $a+b+c<0$;

b) - 2 p - $a+b+c=-405$;

- 1 p finalizarea.

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele D, E şi F astfel încât punctul D aparţine segmentului BC, punctul E aparţine segmentului AB, punctul F aparţine semidreptei BA iar punctul A aparţine segmentului BF şi $CD\equiv BE\equiv AF$. Dacă M este mijlocul segmentului DE şi N este simetricul lui C faţă de M, arătaţi că triunghiul FNC este echilateral.

Rezolvare:

Întrucât M este mijlocul lui NC şi DE obţinem că $CDNE$ este paralelogram (diagonalele patrulaterului se înjumătăţesc). Atunci $CD\|NE$ şi $CD=NE$. Urmează că $\sphericalangle NEB\equiv\sphericalangle EBC$ (alterne interne), deci $\sphericalangle NEB=60^0$.

Pe de altă parte, din $BE\equiv CD$ şi $CD\equiv BE$ deducem $NE\equiv BE$; urmează că $\triangle NEB$ este isoscel şi cum $\sphericalangle NEB=60^0$, dobţinem că $\triangle NEB$ este echilateral. Atunci $NB\equiv BE\equiv NE$ şi $\sphericalangle NBE=60^0$. Deducem că $\sphericalangle NBC=\sphericalangle NBE+\sphericalangle ABC=120^0$ şi $\sphericalangle FAC=180^0-\sphericalangle BAC=120^0$.

Avem: $NB\equiv AF$, $BC\equiv AC$ şi $\sphericalangle NBC=\sphericalangle FAC=120^0$ deci $\triangle NBC\equiv\triangle FAC$. Obţinem că $NC\equiv FC$ şi $\sphericalangle NCB\equiv\sphericalangle FCA$. Atunci $\sphericalangle FCN=\sphericalangle FCA+\sphericalangle ACN=\sphericalangle NCB+\sphericalangle ACN=\sphericalangle ACB=60^0$, deci $\triangle FCN$ este echilateral.

Acordarea punctajului:

- 1 p - figura;
- 1 p - $CDNE$ este paralelogram;

- 1 p - $\sphericalangle NEB = 60^0$;
- 1 p - $\triangle NEB$ este echilateral;
- 1 p - $\sphericalangle NBC = \sphericalangle FAC = 120^0$;
- 1 p - $NC \equiv FC$, $\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle FCA$;
- 1 p - $\triangle FCN$ este echilateral.

Problema 4. Este posibil ca pe un perete pătrat $ABCD$ cu latura $AB = 7$m să aşezăm 20 de tablouri pătrate cu lungimile laturilor exprimate printr-un număr întreg de metri? (tablourile trebuie să fie fără spaţii între ele şi să nu aibă porţiuni care să se suprapună; dimensiunile tablourilor pot diferi). Dacă da, daţi toate variantele posibile de dimensiuni de tablouri (şi numărul lor) şi cel puţin un mod de aşezare a tablourilor pe perete.

Dorel I. Duca, Cluj-Napoca

Rezolvare: Evident, latura oricărui tablou nu poate fi mai mare decât 7 metri. Dacă notăm cu $n_i \in \mathbb{N}$, numărul de tablouri de latură $i \in \{1, 2, ..., 7\}$ folosite, atunci pe de o parte,

$$n_1 + n_2 + ... + n_7 = 20, \qquad (1)$$

iar pe de altă parte trebuie să acoperim peretele (ca arie), deci

$$n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 4 + n_3 \cdot 9 + ... + n_7 \cdot 7^2 = 49. \qquad (2)$$

Scăzând (1) din (2), obţinem

$$3n_2 + 8n_3 + 15n_4 + 24n_5 + 35n_6 + 48n_7 = 29.$$

Urmează că $n_6 = n_7 = 0$ şi

$$3n_2 + 8n_3 + 15n_4 + 24n_5 = 29.$$

Atunci $n_5 \in \{0, 1\}$. Dacă:

a) $n_5 = 1$, atunci $3n_2 + 8n_3 + 15n_4 = 5$ şi deci $n_3 = n_4 = 0$ şi $3n_3 = 5$ ceea ce este imposibil.

b) $n_5 = 0$, atunci $3n_2 + 8n_3 + 15n_4 = 29$ şi deci $n_4 \in \{0, 1\}$.

b$_1$) Dacă $n_4 = 1$, atunci $3n_2 + 8n_3 = 14$ şi deci $n_3 = 1$ şi $n_2 = 2$; urmează că $n_1 = 16$; posibil de aşezat, de exemplu: tabloul 4×4 stânga sus, tabloul 3×3 dreapta sus, un tablou 2×2 stânga jos, celălalt tablou 2×2 dreapta jos şi celelalte 16 tablouri 1×1 în spaţiile rămase libere.

b$_2$) Dacă $n_4 = 0$, atunci $3n_2 + 8n_3 = 29$ şi deci $n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b$_{21}$) Dacă $n_3 = 3$, atunci $3n_2 = 5$, imposibil.

b$_{22}$) Dacă $n_3 = 2$, atunci $3n_2 = 13$, imposibil.

b$_{23}$) Dacă $n_3 = 1$, atunci $n_2 = 7$ şi deci $n_1 = 12$; posibil de aşezat, de exemplu: tabloul 3×3 în mijloc, 2 tablouri 2×2 deasupra tabloului 3×3, 2 tablouri 2×2 în stânga tabloului 3×3, 2 tablouri 2×2 în dreapta tabloului

3×3, 1 tablou sub tabloul 3×3 şi celelalte 12 tablouri 1×1 în locurile rămase libere.

b$_{24}$) Dacă $n_3 = 0$, atunci $3n_3 = 29$, imposibil.

Acordarea punctajului:

- 1 pct. - oricare tablou are latura mai mică decât 7 m;
- 2 pct. - determinarea unui caz bun (1.5 p) şi găsirea unei posibile aşezări a tablourilor pe perete (0.5 p);
- 2 pct. - determinarea celuilalt caz bun (1.5 p) şi găsirea unei posibile aşezări a tablourilor pe perete (0.5 p);
- 2 pct. - justificarea că nu mai sunt alte cazuri posibile.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXVIII-a
CLASA a VIII-a
18.10.2025

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$9\{x\}^2 + 1 = 6x,$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Rezolvare: Avem $x = [x] + \{x\}$ cu $[x] \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq \{x\} < 1$. Atunci ecuaţia devine $9\{x\}^2 + 1 = 6([x] + \{x\})$ adică $(3\{x\} - 1)^2 = 6[x]$.

Din $0 \leq \{x\} < 1$ deducem $0 \leq 3\{x\} < 3$, deci $-1 \leq 3\{x\} - 1 < 2$ de unde $0 \leq (3\{x\} - 1)^2 < 4$. Aşadar, $0 \leq 6[x] < 4$ deci $0 \leq [x] < \frac{2}{3}$. Urmează că $[x] = 0$ şi $\{x\} = \frac{1}{3}$. Soluţia ecuaţiei este $x = \frac{1}{3}$.

Acordarea punctajului:

- 3 p - obţinerea ecuaţiei $(3\{x\} - 1)^2 = 6[x]$;
- 2 p - obţinerea inecuaţiei $(3\{x\} - 1)^2 < 4$;
- 2 p - finalizarea.

Problema 2. Piramida $SABCD$ are baza paralelogramul $ABCD$. Pe segmentele SB, SC, respectiv SD considerăm punctele M, N şi P astfel încât $SM = 2MB$, $SN = NC$ şi $SP = 2PD$. Arătaţi că punctele A, M, N şi P sunt coplanare.

Rezolvare: Fie Q mijlocul segmentului NC şi cum $SN = NC$ avem că $\frac{SN}{NQ} = 2 = \frac{SM}{MB}$, deci $MN \| QB$ şi cum Q este mijlocul segmentului NC, avem din reciproca teoremei liniei mijlocii că BQ este linie mijlocie în $\triangle RCB$, unde $MN \cap BC = \{R\}$. Atunci punctul B este mijlocul segmentului RC.

Cum $\frac{SN}{NQ} = 2 = \frac{SP}{PD}$, avem $PN \| DQ$ şi cum Q este mijlocul segmentului NC avem că DQ este linie mijlocie în $\triangle CNT$, unde $PN \cap DC = \{T\}$. Atunci punctul D este mijlocul segmentului TC.

Acum din $ABCD$ paralelogram, obţinem $DC \| AB$ şi $AD \| BC$ şi cum B este mijlocul segmentului RC şi D mijlocul segmentului TC, punctele T, A şi R sunt coliniare, iar A este mijlocul segmentului TR.

Din $P \in TN$ şi $M \in RN$ cerinţa problemei este demonstrată, A, M, N, P sunt coliniare

Acordarea punctajului:

- 2 p - B este mijlocul segmentului RC;

- 2 p - D este mijlocul segmentului TC;
- 2 p - A este mijlocul segmentului TR;
- 1 p - finalizarea.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC în care $\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 135^0$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura BC în punctul D, iar bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în punctul E.

a) Să se determine $\mathrm{m}(\sphericalangle BED)$.

b) Dacă, în plus, $\mathrm{m}(\sphericalangle B) = 30^0$, demonstraţi că $\frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Rezolvare: Din $AD \perp AB$ deducem $\mathrm{m}(\sphericalangle DAB) = 90^0$ şi cum $\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 135^0$ rezultă $\mathrm{m}(\sphericalangle DAC) = 45^0 = m\left(\sphericalangle CAN\right)$ şi deci $(AC$ este bisectoare exterioară pentru triunghiul ABD. Cum $(BE$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ABD$, iar $(DE \cap (BE \cap (AC = \{E\}$, deduce că $(DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ exterior triunghiului ABD.

Punem, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDC = b$; $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBE = a$; $\sphericalangle BED = x$. Din propietatea unghiului exterior avem că $b = a + x$ şi $2b = 90^0 + 2a$. Deducem că $2x = 90^0$ şi deci $\mathrm{m}(\sphericalangle BED) = 45^0$.

b) Avem $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EDA$ şi $\sphericalangle DEM = \sphericalangle DAE$ şi atunci $\triangle EDM \sim \triangle ADE$ $(U.U)$, deci $\frac{DM}{DE} = \frac{DE}{AD}$, adică $DE^2 = DM \cdot AD$ (1)

În $\triangle ABD$, $(BM$ este bisectoarea unghiului b şi atunci $\frac{DM}{AM} = \frac{BD}{AB}$ deci $\frac{DM}{AM+MD} = \frac{BD}{AB+BD}$ adică $\frac{DM}{AD} = \frac{BD}{AB+BD}$ (2) Acum din (1) şi (2) avem $DE^2 = \frac{AD^2 \cdot BD}{AB+BD}$ (3)

Din teoremele unghiului de 30^0 şi Pitagora aplicate în triunghiul dreptunghic ABD avem că: $AD = y$, $BD = 2y$ şi $AB = \sqrt{3}y$. Înlocuind acestea în relaţia (3) obţinem

$$DE^2 = \frac{y^2 \cdot 2y}{y\sqrt{3} + 2y} = 2y^2\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{BD^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}$$

de unde $\frac{DE}{BD} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Acordarea punctajului:
- 1 p - $(DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ exterior triunghiului ABD;
- 1 p - $\mathrm{m}(\sphericalangle BED) = 45^0$;
- 3 p - $DE^2 = \frac{AD^2 \cdot BD}{AB+BD}$;
- 2 p - finalizarea.

Problema 4. Este posibil ca pe un perete pătrat $ABCD$ cu latura $AB = 7$m să aşezăm 20 de tablouri pătrate cu lungimile laturilor exprimate printr-un număr întreg de metri? (tablourile trebuie să fie fără spaţii între ele şi să nu aibă porţiuni care să se suprapună; dimensiunile tablourilor pot diferi). Dacă da, daţi toate variantele posibile de dimensiuni de tablouri (şi numărul lor) şi cel puţin un mod de aşezare a tablourilor pe perete.

Dorel I. Duca, Cluj-Napoca

Rezolvare: Evident, latura oricărui tablou nu poate fi mai mare decât 7 metri. Dacă notăm cu $n_i \in \mathbb{N}$, numărul de tablouri de latură $i \in \{1, 2, ..., 7\}$ folosite, atunci pe de o parte,

$$n_1 + n_2 + ... + n_7 = 20, \qquad (1)$$

iar pe de altă parte trebuie să acoperim peretele (ca arie), deci

$$n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 4 + n_3 \cdot 9 + ... + n_7 \cdot 7^2 = 49. \qquad (2)$$

Scăzând (1) din (2), obţinem

$$3n_2 + 8n_3 + 15n_4 + 24n_5 + 35n_6 + 48n_7 = 29.$$

Urmează că $n_6 = n_7 = 0$ şi

$$3n_2 + 8n_3 + 15n_4 + 24n_5 = 29.$$

Atunci $n_5 \in \{0, 1\}$. Dacă:

a) $n_5 = 1$, atunci $3n_2 + 8n_3 + 15n_4 = 5$ şi deci $n_3 = n_4 = 0$ şi $3n_3 = 5$ ceea ce este imposibil.

b) $n_5 = 0$, atunci $3n_2 + 8n_3 + 15n_4 = 29$ şi deci $n_4 \in \{0, 1\}$.

b_1) Dacă $n_4 = 1$, atunci $3n_2 + 8n_3 = 14$ şi deci $n_3 = 1$ şi $n_2 = 2$; urmează că $n_1 = 16$; posibil de aşezat, de exemplu: tabloul 4×4 stânga sus, tabloul 3×3 dreapta sus, un tablou 2×2 stânga jos, celălalt tablou 2×2 dreapta jos şi celelalte 16 tablouri 1×1 în spaţiile rămase libere.

b_2) Dacă $n_4 = 0$, atunci $3n_2 + 8n_3 = 29$ şi deci $n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b_{21}) Dacă $n_3 = 3$, atunci $3n_2 = 5$, imposibil.

b_{22}) Dacă $n_3 = 2$, atunci $3n_2 = 13$, imposibil.

b_{23}) Dacă $n_3 = 1$, atunci $n_2 = 7$ şi deci $n_1 = 12$; posibil de aşezat, de exemplu: tabloul 3×3 în mijloc, 2 tablouri 2×2 deasupra tabloului 3×3, 2 tablouri 2×2 în stânga tabloului 3×3, 2 tablouri 2×2 în dreapta tabloului 3×3, 1 tablou sub tabloul 3×3 şi celelalte 12 tablouri 1×1 în locurile rămase libere.

b_{24}) Dacă $n_3 = 0$, atunci $3n_3 = 29$, imposibil.

Acordarea punctajului:

- 1 pct. - oricare tablou are latura mai mică decât 7 m;
- 2 pct. - determinarea unui caz bun (1.5 p) şi găsirea unei posibile aşezări a tablourilor pe perete (0.5 p);
- 2 pct. - determinarea celuilalt caz bun (1.5 p) şi găsirea unei posibile aşezări a tablourilor pe perete (0.5 p);
- 2 pct. - justificarea că nu mai sunt alte cazuri posibile.