CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXIX-a
CLASA a V-a
17.10.2026

Problema 1. Numerele naturale a, b, c, d cu $a < b < c < d$, aşezate în această ordine formează cifrul unui seif. Află cifrul acestui seif ştiind că:

i) Numerele a, b, c, d împărţite la acelaşi număr natural x ($x > 2$), dau de fiecare dată câtul 2;

ii) Resturile împărţirii numerelor a, b, c, d, la x, sunt numere consecutive;

iii) Suma numerelor a, b, c, d este egală cu 46.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu ....(1 p)

Avem $a = 2x + r$, $r < x$; $b = 2x + (r + 1)$, $r + 1 < x$; $c = 2x + (r + 2)$, $r + 2 < x$; $d = 2x + (r + 3)$, $r + 3 < x$. (1 p.)

Atunci $a + b + c + d = 46$ ne conduce la $2x + r = 10$. (1 p)

Din $2x + 2 = 10$, deducem că r este par, deci $r \in \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ (1 p)

Dacă $r = 0$, atunci $x = 5$, deci $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$. (2 p)

Dacă $r = 2$, atunci $x = 4$, $r + 3 = 5$ şi cum $r + 3 > x$ această situaţie nu convine. (1 p)

Dacă $r = 4$, atunci $x = 3$ şi $r > x$, deci nici această situaţie nu convine. (1 p)

Analog, cercetând pentru $r \geq 6$ obţinem soluţii neconvenabile. (1 p)

Deci cifrul este 10111213. (1 p)

Problema 2. Un număr natural de forma $\overline{abc}$, scris în baza 10, se numeşte "papiist 2026" dacă îndeplineşte simultan condiţiile:

a) Numărul format din primele două cifre adunat cu numărul format din ultimele două cifre este exact de 35 de ori mai mare decât cifra din mijloc;

b) Produsul dintre cifra sutelor şi cifra zecilor este egal cu cifra unităţilor;

c) Toate cifrele numărului sunt distincte şi nenule.

A. Numărul 328 este număr papiist-2026?

B. Află numerele papiiste-2026.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu 1p

A. Verifică dacă 328 este papiist-2026 ..... 1 p.

B. Scriem matematic cele 3 relaţii ce trebuiesc îndeplinite de numărul "papiist – 2026”:

$\overline{ab} + \overline{bc} = 35 \times b$, $a \times b = c$, $a \neq b \neq c \neq a$, $a \times b \times c \neq 0$. (1 p)

Atunci $\overline{ab} + \overline{bc} = 35 \times b \Leftrightarrow 10 \times a + b + 10 \times b + c = 35b \Leftrightarrow 10 \times a + c = 24b \Leftrightarrow \overline{ac} = 24 \times b$. (3 p)

Cum b este cifră nenulă deducem că $\overline{ac} \in \{24, 48, 72, 96\}$. (2 p)

Deci: $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$ sau $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$ sau $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$ sau $a = 9$, $b = 4$, $c = 6$. (1 p)

Aşadar, numărul "papiist – 2026" este egal cu 428. (1 p)

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale de la 1 la 2026. La fiecare pas, un elev alege două numere oarecare de pe tablă, le şterge, iar în locul lor scrie numărul obţinut prin scăderea numărului mai mic din cel mai mare. Procedeul se repetă până când pe tablă rămâne un singur număr.

a) Arătaţi că suma tuturor celor 2026 de numere scrise iniţial pe tablă este un număr impar.

b) Justificaţi dacă ultimul număr rămas pe tablă poate fi 0.

c) Stabiliţi dacă ultimul număr rămas pe tablă este par sau impar.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu. . . .1p

a) Scrie formula sumei primelor 2026 de numere naturale:

$S = 1 + 2 + ... + 2026 = (2026 \times 2027) : 2 = 1013 \times 2027$. (1 p)

Justifică faptul că suma S este număr impar. (2 p)

b-c) Fie x şi y cele două numere alese la un pas oarecare, cu $x > y$. Suma lor iniţială în cadrul totalului este $x + y$, iar după înlocuire devine $x - y$. (1 p)

Calculează diferenţa dintre suma veche şi suma nouă: $(x+y)-(x-y) = 2y$. (1 p)

Justifică faptul că, deoarece $2y$ este număr par, la fiecare pas suma totală a numerelor de pe tablă scade cu un număr par. (1 p)

Concluzionează că paritatea sumei numerelor de pe tablă rămâne neschimbată (impară) pe tot parcursul jocului (invariantul). (1 p)

Ultimul număr rămas reprezintă suma finală. Deoarece paritatea se păstrează, ultimul număr este în mod obligatoriu impar. (1 p)

Cum 0 este un număr par, iar ultimul număr trebuie să fie impar, rezultă că ultimul număr rămas nu poate fi 0. (1 p)

Problema 4. Se consideră şirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13, 17, ...

a) Aflaţi al 2026-lea termen al şirului.

b) Verificaţi dacă numărul 2025 este termen al şirului. În caz afirmativ, specificaţi ce loc ocupă.

c) Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu ... 1 p

a) Observă regula de formare a termenilor: termenul de pe poziţia n are forma $T_n = 4 \times (n - 1) + 1$. (1 p)

Înlocuieşte $n = 2026$, obţinem $T_{2026} = 4 \times (2026 - 1) + 1 = 8101$. (2 p)

b) Pune condiţia ca 2025 să fie de forma $4 \times (n - 1) + 1$. (1 p)

Obţine $n - 1 = 506$. (1 p)

Aşadar, $n = 507$, deci numărul 2025 ocupă poziţia 507. (1 p)

c) Scrie suma primilor 100 de termeni: $S = 1 + 5 + 7 + ... + t_{100}$ şi calculează $t_{100} = 4 \times 99 + 1 = 397$. (1 p)

Rescrie suma $S = (4 \times 0 + 1)+(4 \times 1 + 1)+...+(4 \times 99 + 1) = 4\times(1 + 2 + ... + 99)+ 100 = 19900$. (2 p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXIX-a
CLASA a VI-a
17.10.2026

Problema 1. Să se determine numerele naturale x şi y pentru care are loc egalitatea: $3^x + 8y = y^2$.

Gazeta matematică

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu ..... 1 p
$3^x + 8y = y^2 \iff 3^x = y^2 - 8y \Leftrightarrow y\,(y-8)$ (2 p)
$3^x > 1 \Longrightarrow y\,(y-8) > 0 \Longrightarrow y > 8$ (2 p)
Produsul a două numere naturale este o putere a lui 3 dacă şi numai dacă ambii factori sunt puteri ale lui 3. Atunci putem nota $y = 3^a$ şi $y - 8 = 3^b$ cu $a,\, b \in N,\, a > b$ (1 p)
$3^a - 3^b = 8 \Leftrightarrow 3^b\left(3^{a-b} - 1\right) = 8 \Leftrightarrow 3^b = 1,\, 3^{a-b} - 1 = 8$ (2 p)
Din $3^b = 1$ obţinem $b = 0$, iar din $3^{a-b} - 1 = 0$, obţinem $a = 2$, deoarece $b = 0$ (1 p)
În final, $y = 3^a = 3^2 = 9$ şi $x = a + b = 2 + 0 = 2$. (1 p)

Problema 2. Determinaţi numerele naturale a şi b astfel ca numărul $2025^a - 2026^b$ să fie pătrat perfect.

Gazeta matematică

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu 1p
Fie k un număr natural astfel încât $2025^a - 2026^b = k^2$. (1 p)
Reamintim faptul că un pătrat perfect dă restul 0 sau 1 la împărţirea la 3. (1 p)
Cazul 1. Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, atunci $2025^a - 2026^b = 1 - 1 = 0$, deci $a = 0$ şi $b = 0$ soluţie. (1 p)
Cazul 2. Dacă $a = 0$ şi $b \geq 1$, atunci $2025^a - 2026^b = 1 - 2026^b < 0$, deci nu avem soluţie. (1 p)
Cazul 3. Dacă $a \geq 1$ şi $b = 0$, atunci $2025^a - 2026^b = 2025^a - 1 = k^2$. Cum suma cifrelor numărului 2025 se împarte exact la 3, rezultă că 2025^a dă restul zero la împărţirea la 3. Scăzând 1 dintr-un multiplu de 3, obţinem un număr care dă restul 2 la împărţirea cu 3, deci nu este pătrat perfect. (2 p)
Cazul 4. Dacă $a \geq 1$ şi $b \geq 1$, atunci $2025^a - 2026^b = k^2$. Ştim deja că 2025^a dă restul 0 la împărţirea la 3. Dar, $2026^b = (2025 + 1)^b = M_3 + 1$ care la împărţirea cu 3 dă restul 1. Din nou scădem 1 dintr-un multiplu de 3, obţinem un număr care dă restul 2 la împărţirea la 3, deci nu este pătrat perfect. (2 p)
În final, $a = 0$ şi $b = 0$, soluţie unică. (1 p)

Problema 3. Determinaţi perechile de numere naturale a şi b care îndeplinesc simultan condiţiile:

(a) $[a,b]+(a,b)=49$
(b) $a+b$ este număr prim.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu. 1p
Notăm: $(a,b)=d \Longrightarrow a=dx,\ b=dy,\ (x,y)=1$. (1 p)
Atunci: a) $\Longleftrightarrow dxy+d=49 \Longrightarrow d(xy+1)=49$ şi b) $\Leftrightarrow dx+dy=d(x+y)=$ număr prim. (1 p)
$d(xy+1)=49 \Longrightarrow d\in D_{49}=\{1,\ 7,\ 49\}$. (1 p)
$d=1 \Longrightarrow xy+1=49 \Longrightarrow xy=48$ şi $(x,y)=1 \Longrightarrow (x,y)\in\{(1,48);\ (3,16);\ (6,7)\}$ (1 p)
$(a,b)\in\{(1,48);\ (48,1);\ (3,16);\ (16,3);\ (6,7),\ (7,6)\}$ şi $a+b=$număr prim $\Longrightarrow (a,b)\in\{(3,16);(16,3);(6,7),(7,6)\}$ perechi convenabile (2 p)
$d=7 \Longrightarrow xy+1=7 \Longrightarrow xy=6$ şi $(x,y)=1 \Longrightarrow (x,y)\in\{(1,6);(2,3)\}$. (1 p)
$(a,b)\in\{(7,42);\ (42,7);\ (14,21);\ (21,14)\}$ şi $a+b=$număr prim, nu avem soluţie (1 p)
$d=49 \Longrightarrow xy+1=1 \Longrightarrow xy=0$ şi $(x,y)=1$ nu convine. (1 p)

Problema 4. Arătaţi că nu există numere naturale de patru cifre, $\overline{nabc}$, pentru care avem $n\times\overline{abc}=\overline{nabc}$.

Dorel I. Duca

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu .... (1 p)
Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $\overline{nabc}$, pentru care avem $n\times\overline{abc}=\overline{nabc}$. (1 p)
Evident $n,\ a,\ b,\ c\in\{0,1,...,9\}$ şi $n\times a\neq 0$. (1 p)
Deoarece $\overline{nabc}=n\times 1\ 000+\overline{abc}$, egalitatea din enunţ se poate scrie sub forma $(n-1)\times\overline{abc}=n\times 1\ 000$. (1 p)
Deoarece n şi $n-1$ sunt prime între ele, deducem că $n-1\in\{0,1,...,8\}$ este un divizor al lui 1000; deci $n-1\in\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8\}$. (1 p)
Pentru $n-1=1$, obţinem $n=2$. Egalitatea din enunţ devine $2\times\overline{abc}=\overline{2abc}$ şi această egalitate nu poate avea loc pentru că $2\times\overline{abc}\leq 2\times 999=1998<2000\leq\overline{2abc}$. (1 p)
Pentru $n-1=2$, obţinem $n=3$. Egalitatea din enunţ devine $3\times\overline{abc}=\overline{3abc}$. Ultima egalitate nu poate avea loc pentru că $3\times\overline{abc}\leq 3\times 999=2997<3000\leq\overline{3abc}$. (1 p)
Pentru $n-1=4$, obţinem $n=5$. Egalitatea din enunţ devine $5\times\overline{abc}=\overline{5abc}$ şi această egalitate nu poate avea loc pentru că $5\times\overline{abc}\leq 5\times 999=4995<5000\leq\overline{5abc}$. (1 p)
Pentru $n-1=5$, obţinem $n=6$. Egalitatea din enunţ devine $6\times\overline{abc}=\overline{6abc}$ şi această egalitate nu poate avea loc pentru că $6\times\overline{abc}\leq 6\times 999=5994<6000\leq\overline{6abc}$. (1 p)
Pentru $n-1=8$, obţinem $n=9$. Egalitatea din enunţ devine $9\times\overline{abc}=\overline{9abc}$ şi această egalitate nu poate avea loc pentru că $9\times\overline{abc}\leq 9\times 999=8991<9000\leq\overline{9abc}$. (1 p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXIX-a
CLASA a VII-a
17.10.2026

Problema 1. a) Arătaţi că numărul $n=\sqrt{\frac{37}{4,(1)}}+\sqrt{\frac{38}{4,(2)}}+\sqrt{\frac{39}{4,(3)}}+...+\sqrt{\frac{44}{4,(8)}}$ este natural.

b) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza zece cu cifre distinct e, astfel încât $a\times b=c$ şi $n=\sqrt{\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}-\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}\right)-(a+b+c)}$ este natural.

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu .....1 p
a) $4,(1)=\frac{37}{9}$; $4,(2)=\frac{38}{9}$; ..., $4,(8)=\frac{44}{9}$ (1 p)
$\sqrt{\frac{37}{4,(1)}}=\sqrt{\frac{37}{\frac{37}{9}}}=\sqrt{9}=3$; ...; $\sqrt{\frac{44}{4,(8)}}=\sqrt{\frac{44}{\frac{44}{9}}}=\sqrt{9}=3$. (1 p)
Atunci $n=3\times 8=24$ şi 24 este natural. (1 p)
b) Prin calcul $n=3\sqrt{11\,(a+b+c)}$ (1 p)
Cum $n\in\mathbb{N}$, deducem că $a+b+c=11k^2$. Deoarece a, b, c sunt cifre distincte avem $a+b+c\leq 24$, deci $a+b+c=11$. (1 p)
Cum $a+b+c=11\Leftrightarrow a+b+a\times c=11\Leftrightarrow (a+1)\,(b+1)=12$ (2 p)
şi a, b, c sunt cifre diferite de 0, obţinem că $(a,b)\in\{(1,5);(2,3);(3,2);(5,1)\}$. (1 p)
Având în vedere că $a\times b=c$, iar a, b, c sunt cifre distincte avem: $abc\in\{236, 326\}$. (1 p)

Problema 2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă M, $P\in[AD]$, $M\neq P$ şi N, $Q\in[BC]$, $O\in MN$, $O\in PQ$ astfel încât $OM\equiv ON$ şi $OP\equiv OQ$, să se arate că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Ovidiu Pop

Rezolvare şi barem orientativ. Oficiu .... (1 p)
Deoarece $OM\equiv ON$, $OP\equiv OQ$ şi $\sphericalangle POM\equiv\sphericalangle NOQ$ ca unghiuri opuse la vârf, rezultă conform cazului LUL că $\triangle MOP\equiv\triangle NOQ$. (3 p)
Din această congruenţă, avem că $\sphericalangle OMP\equiv\sphericalangle ONQ$, de unde rezultă că $AD\|BC$. (1 p)
Atunci $\sphericalangle APO\equiv\sphericalangle OQC$, ca unghiuri alterne interne, $\sphericalangle AOP\equiv\sphericalangle COQ$, ca unghiuri opuse la vârf şi $OP\equiv OQ$, rezultă că, conform cazului ULU, $\triangle OPA\equiv\triangle OQC$, deci $OA\equiv OC$. (3 p)
Analog, $OB\equiv OD$, deci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. (2 p)

Problema 3. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $\sphericalangle BAC = 100^0$, punctul D aparţine laturii BC şi $\sphericalangle BAD = 30^\circ$. Pe latura AB se consideră punctul E astfel încât $\sphericalangle BCE = 10^\circ$. Aflaţi măsura unghiului DEC.

Adrian Bud

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu .... (1 p)

În triunghiul ABC avem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 40^0$. ... (1p)

În triunghiul ACD avem $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB - \sphericalangle DAB = 100^0 - 30^0 = 70^0$, $\sphericalangle ACD = 40^0$, astfel că $\sphericalangle CDA = 70^0$, deci triunghiul este isoscel cu $CA = CD$. ... (1 p)

Construim triunghiul echilateral CDF, cu F de partea opusă lui E faţă de CA. Atunci $CF = CD = CA$, deci triunghiul ACF este isoscel cu $\sphericalangle FCA = \sphericalangle FCD - \sphericalangle ACD = 20^0$, iar $\sphericalangle CAF = \sphericalangle AFC = 80^0$. ... (2 p)

Cum $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAF = 180^0$, rezultă că punctele B, A, F sunt coliniare. ... (1 p)

În triunghiul BCE, $\sphericalangle CEF$ este un unghi exterior, deci $\sphericalangle CEF = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB = 40^0 + 10^0 = 50^0$. ... (1 p)

Triunghiul FEC având $\sphericalangle FEC = \sphericalangle FCE = 50^0$ este isoscel, cu $FE = FC$. Dar $FC = FD$, deoarece CDF este echilateral; astfel, $FE = FD$. ... (1 p)

În triunghiul FED, isoscel avem $\sphericalangle EFD = \sphericalangle EFC - \sphericalangle DFC = 20^0$, deci $\sphericalangle FED = \sphericalangle FDE = 80^0$. ... (1 p)

În final, $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DEF - \sphericalangle CEF = 80^0 - 50^0 = 30^0$. ... (1 p)

Problema 4. Suma mai multor numere naturale (nu neapărat diferite), în scrierea cărora apar numai cifrele 6 şi 0, este egală cu 123456123456. Care poate fi cel mai mic număr de termeni?

Dorel I. Duca

Rezolvare şi barem orientativ: Oficiu .....(1 p)

Dacă $a = 123456123456$ este suma numerelor a_1, a_2, ..., a_n, în scrierea cărora apar numai cifrele 6 şi 0, atunci numărul $b = \frac{a}{6} = 20576020576$ este suma numerelor $b_1 = \frac{a_1}{6}$, ..., $b_n = \frac{a_n}{6}$, în scrierea cărora apar numai cifrele 1 şi 0. (2 p)

Numărul b conţine cifra 7, deci pentru scrierea lui ca sumă de numere, care au în scrierea lor numai cifrele 1 şi 0, trebuie să folosim cel puţin 7 numere (termeni). (1 p)

Pe de altă parte, numărul b este, de exemplu, suma următoarelor 7 numere, în care apar numai cifrele 1 şi 0 :

- 2 numere de forma 10111010111;
- 3 numere de forma 111000111;
- 1 număr de forma 11000011;
- 1 număr de forma 10000010. (4 p)

Aşadar, numărul a este, de exemplu, suma următoarelor 7 numere, în scrierea cărora apar numai cifrele 6 şi 0 :

- 2 numere de forma 60666060666;
- 3 numere de forma 666000666;
- 1 număr de forma 66000066;
- 1 număr de forma 60000060. (1 p)

Prin urmare, cel mai mic număr de termeni este 7. (1 p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIŢIA a XXIX-a
CLASA a VIII-a
17.10.2026

Problema 1. Se consideră numerele naturale impare $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2026}$. Determinaţi valorile numerelor raţionale x şi y, astfel încât

$$3x-y-4+(|x|-2|y|)\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+...+a_{2026}^2}=0.$$

Rezolvare şi barem orientativ. Oficiu ... (1 p)

Dacă $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2026}$ sunt numere naturale impare vor avea forma $2p+1$. Urmează că $a_0^2,\ a_1^2,\ a_2^2,...,\ a_{2026}^2$ vor avea forma $4q+1$ .... (2 p)

şi atunci $a_0^2+a_1^2+a_2^2+...+a_{2026}^2=4k+2027=4k+4\times 506+3=4\left(k+506\right)+3=4r+3$, deci suma nu poate fi pătrat perfect. .... (2 p)

Aşadar, $\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+...+a_{2026}^2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ .... (1 p)

Ipoteza $x,y\in\mathbb{Q}$, impune condiţiile $3x-y-4=0$ şi $|x|-2|y|=0$. .... (1 p)

Dacă $|x|-2|y|=0$, atunci $x=\pm 2y$. .... (1 p)

Dacă $x=2y$, atunci $5y=4$ deci $y=4/5$ şi $x=8/5$, prin urmare $(x,y)=(4/5,8/5)$. .... (1 p)

Dacă $x=-2y$, atunci $-7y-4=0$, deci $y=-4/7$ şi $x=8/7$, prin urmare $(x,y)=(-4/7,8/7)$. .... (1 p)

Problema 2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=6$ cm, $BC=8$ cm, $AA'=12$ cm. Pe muchiile AA', BB' şi CC' se aleg punctele M, N, respectiv P, astfel încât $AM=4$ cm, $BN=12$ cm, $CP=8$ cm. Dreapta MN intersectează planul (BCC') în punctul X, iar dreapta NP intersectează planul (CDD') în punctul Y. Se consideră planul α determinat de dreapta XY şi punctul A'.

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate? Justificaţi.

A) Planul α este paralel cu planul (ABC).

B) Dreapta XY este paralelă cu dreapta AC.

C) Planul α intersectează planul (ABC) după o dreaptă paralelă cu BD.

D) Dreapta $A'X$ este paralelă cu dreapta CD.

E) Planul α conţine dreapta AC.

Rezolvare şi barem orientativ. Oficiu ... (1 p)

Justifică $N=B'$. (1 p)

Justifică $X=B'$. (1 p)

Justifică $Y=P$. (1 p)

Aşadar, planul α este planul $\alpha=(A'B'P)$. (1 p)

Afirmaţia A) nu este adevărată, justificare. (1 p)

Afirmaţia B) nu este adevărată, justificare. (1 p)

Afirmaţia C) nu este adevărată, justificare. (1 p)
Afirmaţia D) este adevărată, justificare. (1 p)
Afirmaţia E) nu este adevărată, justificare. (1 p)

Problema 3. În triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$ şi $\sphericalangle A = 40^0$, considerăm punctul D pe latura AC astfel încât $\sphericalangle ABD = 60^0$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în punctul E, iar punctul T aparţine bisectoarei unghiului A astfel încât E să fie pe segmentul AT şi $ET \equiv AB$. Arătaţi că patrulaterul $ABTC$ este romb.

Gazeta matematică

Rezolvare şi barem orientativ. Oficiu ..... (1p)

Construim triunghiul echilateral ABM. ... (1p)

Avem $\sphericalangle BAE = 20^0$, $\sphericalangle MAD = \sphericalangle BAM - \sphericalangle BAD = 20^0 \Longrightarrow \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle MAD$

$AB \equiv AM$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AMD = 60^0 \Longrightarrow \triangle ABE \equiv \triangle AMD$ (U.L.U) $\Longrightarrow BE \equiv MD$ (1) .... (2p)

$\triangle ACM$ este isoscel cu $\sphericalangle CAM = 20^0 \Longrightarrow \sphericalangle MCA = \sphericalangle AMC = 80^0$

$\sphericalangle MDC = \sphericalangle ADB = 180^0 - (60^0 + 40^0) = 80^0 \Longrightarrow \sphericalangle MDC = \sphericalangle MCD = 80^0$ $\Longrightarrow \triangle MDC$ este isoscel $\Longrightarrow MC \equiv MD$ (2) .... (2p)

Din (1) şi (2) $\Longrightarrow BE \equiv MD \equiv MC$.

$ET \equiv AB \equiv AC$, $\sphericalangle TEB = 20^0 + 60^0 = 80^0$ (exterior triunghiului ABE) $\Longrightarrow \sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle TEB \Longrightarrow \triangle AMC \equiv \triangle TBE$ (L.U.L) $\Longrightarrow AM \equiv TB$. Dar, $AM \equiv AC \Longrightarrow AC \equiv TB$ .... (2p)

$\triangle ABC$ este isoscel şi AE este bisectoare, rezultă că AE este mediatoarea segmentului BC. Cum T aparţine dreptei AE, din proprietatea mediatoarei rezultă că $TC \equiv TB$. .... (1p)

Avem $AC \equiv AB \equiv TB \equiv TC$, deci $ABTC$ este romb. .... (1p)

Problema 4. Suma mai multor numere naturale (nu neapărat diferite), în scrierea cărora apar numai cifrele 7 şi 0, este egală cu $\underbrace{333...33}_{\text{2028 de cifre}}$. Care poate fi cel mai mic număr de termeni?

Dorel I. Duca

Rezolvare şi barem orientativ: **??** Oficiu .... (1 p)

Dacă $a = \underbrace{333...33}_{2028}$ este suma numerelor a_1, a_2, ..., a_n, în scrierea cărora s-a folosit numai cifrele 7 şi 0, atunci numărul $b = \frac{a}{7} = \underbrace{47619047619...047619}_{2027}$, este suma numerelor $\frac{a_1}{7}$, ..., $\frac{a_n}{7}$, în scrierea cărora intră numai cifrele 1 şi 0. (1 p)

Numărul b conţine cifra 9, deci pentru scrierea lui ca sumă de numere, care au în scrierea lor numai cifrele 1 şi 0, trebuie să folosim cel puţin 9 numere. (1 p)

Pe de altă parte, numărul b este, de exemplu, suma următoarelor 9 numere:

- 1 număr de forma $\underbrace{11111011111...011111}_{2027}$,
- 3 numere de forma $\underbrace{111010111101...011101}_{2027}$,
- 2 numere de forma $\underbrace{1101001101...001101}_{2026}$,
- 1 număr de forma $\underbrace{1001001001...001001}_{2026}$,
- 2 numere de forma $\underbrace{1000001...000001}_{2023}$. (5 p)

Aşadar, numărul a este, de exemplu, suma următoarelor 9 numere, în scrierea cărora folosim numai cifrele 3 şi 0 :

- 1 număr de forma $\underbrace{33333033333...033333}_{2027}$,
- 3 numere de forma $\underbrace{333030333303...033303}_{2027}$,
- 2 numere de forma $\underbrace{3303003303...003303}_{2026}$,
- 1 număr de forma $\underbrace{3003003003...003003}_{2026}$,
- 2 numere de forma $\underbrace{3000003...000003}_{2023}$. (1 p)

Prin urmare, numărul minim de termeni este 9. (1 p)