Concursul Interjudeţean de Matematică „Alexandru Papiu Ilarian“ Ediţia a XXIX-a Clasa a IX-a 17.10.2026 Barem

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi P mijlocul lui AB. Considerăm $AE \perp CP$, unde $E \in CP$ şi notăm cu O_1 şi O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AEC, respectiv AEB. Arătaţi că O_1O_2PC este paralelogram.

Marin Ionescu, GMB

Soluţie. Deoarece triunghiul AEC este dreptunghic în E, centrul cercului său circumscris O_1 este mijlocul ipotenuzei AC. Astfel, $CO_1 \perp AB$.

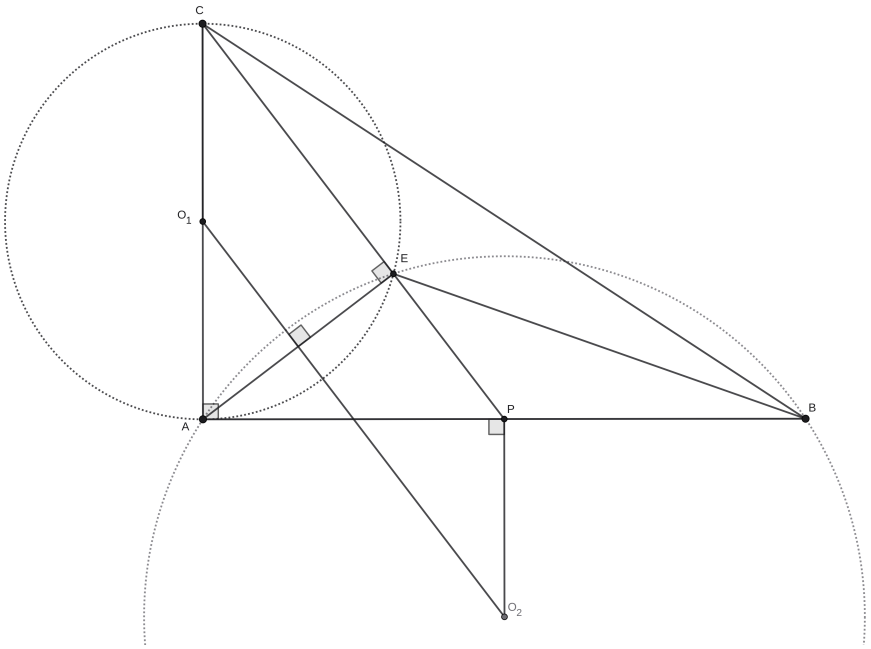
De asemenea, $O_2P \perp AB$ deoarece O_2P este mediatoarea segmentului AB, deci

$$CO_1 \parallel O_2P.$$

Punctele O_1 şi O_2 se află pe mediatoarea segmentului AE, astfel că $O_1O_2 \perp AE$. Dar $AE \perp CP$, deci

$$O_1O_2 \parallel CP.$$

Deoarece patrulaterul O_1O_2PC are laturile opuse paralele, acesta este paralelogram. □



Barem

- O_1 este mijlocul lui AC **2p**
- $CO_1 \parallel O_2P$ **3p**
- $O_1O_2 \parallel CP$ **3p**
- Patrulaterul O_1O_2PC este paralelogram **1p**
- Oficiu **1p**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul. Pe o tablă scriem fracţiile

$$\frac{1}{2^n+1}\ ,\quad \frac{2}{2^n+2}\ ,\quad \frac{3}{2^n+3}\ ,\quad \cdots\ ,\quad \frac{2^n}{2^n+2^n}\ ,$$

iar apoi le simplificăm în forma ireductibilă. Să se demonstreze că suma tuturor numitorilor ce rezultă după simplificare este 4^n+1, pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie. Folosim metoda inducţiei matematice. Pentru cazul de bază $n=1$, fracţiile ce apar sunt

$$\frac{1}{3},\quad \frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

iar suma numitorilor, după simplificare, este $3+2=5=4^1+1$.

Presupunem acum că enunţul este adevărat pentru $n\geq 1$ fixat şi considerăm toate fracţiile de forma

$$\frac{k}{2^{n+1}+k},\quad k=1,2,\ldots,2^{n+1}.$$

Pentru k par, $k=2j$ cu $j=1,2,\ldots,2^n$,

$$\frac{k}{2^{n+1}+k}=\frac{2j}{2^{n+1}+2j}=\frac{j}{2^n+j},$$

deci, simplificând cu 2 aceste fracţii obţinem fracţiile din ipoteza inductivă, ai căror numitori, după simplificare, au suma 4^n+1.

Pentru k impar, $k=2j+1$ nu putem simplifica fracţia $\dfrac{k}{2^{n+1}+k}=\dfrac{2j+1}{2^{n+1}+2j+1}$, deoarece

$$\text{cmmdc}(2j+1,2^{n+1}+2j+1)=\text{cmmdc}(2j+1,2^{n+1})=1.$$

Astfel, în acest caz, numitorii rămân $2^{n+1}+2j+1$, iar suma acestora este:

$$\begin{aligned}(2^{n+1}+1)+(2^{n+1}+3)+\ldots+(2^{n+1}+2^{n+1}-1) &= 2^n\cdot 2^{n+1}+(1+3+\ldots+(2\cdot 2^n-1))\\ &= 2^{2n+1}+(2^n)^2=3\cdot 4^n.\end{aligned}$$

Astfel, suma tuturor numitorilor, după simplificare, este $4^n+1+3\cdot 4^n=4^{n+1}+1$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Barem

- Cazul de bază $n=1$ **1p**
- Cazul general, k par **3p**
- Cazul general, k impar **4p**
- Însumarea rezultatelor celor două subcazuri **1p**
- Oficiu **1p**

Problema 3. Să se demonstreze că pentru orice $x, y, z \in [0,1]$ are loc inegalitatea

$$x+y+z+\frac{1}{4}|3-2x-2y-2z| \geq xy+yz+zx+\frac{3}{4}.$$

Când are loc egalitatea?

Alex Buna-Mărginean

Soluţie. Deoarece $|3-2x-2y-2z| = 3-2(x+y+z)$ dacă $x+y+z \leq \frac{3}{2}$ şi $|3-2x-2y-2z| = 2(x+y+z)-3$ dacă $x+y+z > \frac{3}{2}$, distingem două cazuri:

Cazul 1: Dacă $x+y+z \leq \frac{3}{2}$, inegalitatea dată se rescrie sub forma

$$x+y+z+\frac{1}{4}(3-2(x+y+z)) \geq xy+yz+zx+\frac{3}{4} \iff \frac{1}{2}(x+y+z) \geq xy+yz+zx.$$

Pentru a demonstra această ultimă inegalitate, observăm că

$$xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} \leq \frac{x+y+z}{2},$$

unde ultima inegalitate provine din $x+y+z \leq \frac{3}{2}$.

Pentru egalitatea, este necesar ca $xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{x+y+z}{2}$. Din prima relaţie obţinem $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$, iar din a doua $x+y+z \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$. Astfel, avem egalitate pentru $x=y=z=\frac{1}{2}$ sau $x=y=z=0$.

Cazul 2: Dacă $x+y+z > \frac{3}{2}$, folosim substituţia $a=1-x$, $b=1-y$, $c=1-z$. Observăm că $a,b,c \in [0,1]$, $a+b+c < \frac{3}{2}$, iar inegalitatea dată devine

$$a+b+c+\frac{1}{4}|2a+2b+2c-3| \geq ab+bc+ac+\frac{3}{4},$$

ajungându-se la primul caz.

Cum $a+b+c < \frac{3}{2}$, egalitatea se obţine acum doar pentru $a=b=c=0$, deci avem în plus cazul de egalitate $x=y=z=1$.

□

Barem

- Distingerea celor două cazuri **1p**
- Cazul 1 ..... **4p**
- Cazul 2 ..... **3p**
- Cazurile de egalitate **1p**
- Oficiu **1p**

Problema 4. Fie $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k \leq n-1$ şi $1^2+2^2+\ldots+k^2 \leq m < 1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2$.

(a) Demonstraţi că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$ cu $x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + \ldots + n^2x_n \leq m$, avem

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

(b) Fie $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ o mulţime nevidă cu suma pătratelor elementelor sale mai mică sau egală cu m. Demonstraţi că suma elementelor mulţimii A este mai mică sau egală cu $\dfrac{k(k+3)}{2}$.

Alex Buna-Mărginean

Soluţie. (a) Prezentăm două soluţii alternative:

Alternativa 1: Cum $i(k+1-i)x_i \leq 0$ pentru $i = k+1, \ldots, n$ şi $x_i \in [0,1]$, avem:

$$\begin{aligned}(k+1)\sum_{i=1}^{n} ix_i - \sum_{i=1}^{n} i^2x_i &= \sum_{i=1}^{n} i(k+1-i)x_i \leq \sum_{i=1}^{k} i(k+1-i)x_i \leq \sum_{i=1}^{k} i(k+1-i) \\ &= (k+1)\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} i^2 = (k+1)\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.\end{aligned}$$

Aşadar, folosind $x_1+2^2x_2+3^2x_3+\ldots+n^2x_n \leq m < 1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ix_i &\leq \frac{1}{k+1}\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \sum_{i=1}^{n} i^2x_i\right) \\ &< \frac{1}{k+1}\left(\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Alternativa 2: Arătăm mai întâi că maximul expresiei $E(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$ când $x_1 + 2^2x_2 + \ldots + n^2x_n \leq m$ este atins pentru

$$x_1^* = \ldots = x_k^* = 1, \quad x_{k+1}^* = \frac{m - 1^2 - 2^2 - \ldots - k^2}{(k+1)^2} \in [0,1), \quad x_{k+2}^* = \ldots = x_n^* = 0. \qquad (\star)$$

În primul rând, observăm că orice maxim al $E(x_1, \ldots, x_n)$ este atins pentru valori care satisfac inegalitatea $x_1 + 2^2x_2 + \ldots + n^2x_n \leq m$ cu egalitate. În caz contrar, deoarece $m < 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, am putea creşte cel puţin unul dintre $x_i < 1$, obţinând o valoare mai mare pentru $E(x_1, \ldots, x_n)$.

Astfel, vom spune că $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$ sunt *fezabile* dacă $x_1+2^2x_2+\ldots+n^2x_n = m$, şi observăm că valorile $(\star)$ sunt fezabile.

Presupunem prin absurd că $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ nu ating maximul lui $E(x_1, \ldots, x_n)$, care de fapt este atins pentru alte valori fezabile $x_1', x_2', \ldots, x_n'$. Atunci există $1 \leq i < j \leq n$ pentru care $x_i' < 1$ şi $x_j' > 0$ căci, în caz contrar, după primul termen strict mai mic decât 1, toţi termenii următori ar fi nuli, iar condiția $x_1' + 2^2x_2' + \ldots + n^2x_n' = m$ ar impune valorile $(\star)$. Definim

$$\varepsilon := \min\left(x_j', (1-x_i')\frac{i^2}{j^2}\right) > 0, \quad x_\ell'' := \begin{cases} x_\ell', & \text{dacă } \ell \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}, \\ x_i' + \frac{j^2}{i^2}\varepsilon, & \text{dacă } \ell = i, \\ x_j' - \varepsilon, & \text{dacă } \ell = j. \end{cases}$$

Observăm că $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ sunt fezabile, dar

$$\begin{aligned} E(x_1'', \ldots, x_n'') - E(x_1', \ldots, x_n') &= (x_1'' + 2x_2'' + \ldots + nx_n'') - (x_1' + 2x_2' + \ldots + nx_n') \\ &= i(x_i'' - x_i') + j(x_j'' - x_j') = i \cdot \frac{j^2}{i^2}\varepsilon - j\varepsilon = j\varepsilon\left(\frac{j}{i} - 1\right) > 0, \end{aligned}$$

deci $E(x_1'', \ldots, x_n'') > E(x_1', \ldots, x_n')$, contrazicând faptul că $E(x_1', \ldots, x_n')$ este maxim. Astfel, maximul $E(x_1, \ldots, x_n)$ este atins pentru $(\star)$.

Fie acum $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ cu $x_1 + 2^2x_2 + \ldots + n^2x_n \leq m$. Atunci, deoarece $x_{k+1}^* \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = E(x_1, \ldots, x_n) &\leq E(x_1^*, \ldots, x_n^*) = x_1^* + 2x_2^* + \ldots + nx_n^* \\ &< 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) + 0 + \ldots + 0 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\ , \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia.

(b) Notăm cu $s(A)$ suma elementelor mulţimii $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ şi considerăm $x_i \in \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$ cu

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in A, \\ 0, & \text{dacă } i \notin A, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci, faptul că suma pătratelor elementelor mulţimii A este mai mică sau egală cu m echivalează cu faptul că $x_1 + 2^2x_2 + \ldots + n^2x_n \leq m$, deci, conform concluziei subpunctului (a),

$$s(A) = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dar cum $s(A)$ este un număr întreg, avem, de fapt, $s(A) \leq \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} - 1 = \dfrac{k(k+3)}{2}$.

□

Barem

(a) *Alternativa 1*

$i(k+1-i)x_i \leq 0$ pentru $i \geq k+1$ **2p**

Prima inegalitate **1p**

A doua inegalitate **1p**

(a) *Alternativa 2*

Enunţarea valorilor $(\star)$ **1p**

Demonstraţie $(\star)$ atinge maximul **2p**

Concluzionarea inegalităţii stricte **1p**

(b)

- Alegerea $x_i = 1$ pentru $i \in A$ şi $x_i = 0$ în caz contrar **3p**
- Aplicarea subpunctului (a) **1p**
- Folosirea faptului că suma este întreagă pentru concluzionare **1p**
- Oficiu **1p**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Alexandru Papiu Ilarian“ Ediţia a XXIX-a Clasa a XI-a 17.10.2026 Barem

Problema 1. Determinaţi $n \geq 3$ cu proprietatea că există o permutare $\sigma \in S_n$ pentru care k divide $\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(k)$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Mihai Bălună, GMB

Soluţie. Pentru $n = 3$, observăm că permutarea $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$ satisface condiţia din ipoteză. Demonstrăm mai departe că nicio altă valoare a lui $n > 3$ convine.

Pentru $k = n$ avem

$$n \mid \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) \iff n \mid 1 + 2 + \ldots + n \iff n \,\Big|\, \frac{n(n+1)}{2},$$

deci este necesar ca n să fie impar.

Pentru $k = n - 1$, avem

$$\begin{aligned} n - 1 \mid \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n-1) &\iff n - 1 \mid 1 + 2 + \ldots + n - \sigma(n) \\ &\iff n - 1 \,\Big|\, \frac{n(n+1)}{2} - \sigma(n). \end{aligned}$$

Fie $n = 2m + 1$ cu $m \geq 2$. Atunci,

$$2m \mid (2m+1)(m+1) - \sigma(n) \iff 2m \mid 2m^2 + 3m + 1 - \sigma(n) \iff 2m \mid m + 1 - \sigma(n),$$

iar cum $\sigma(n) \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$, este necesar ca $\sigma(n) = m + 1$.

Pentru $k = n - 2$,

$$\begin{aligned} 2m - 1 \mid \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n-2) &\iff 2m - 1 \mid 1 + 2 + \ldots + n - \sigma(n-1) - \sigma(n) \\ &\iff 2m - 1 \mid (2m+1)(m+1) - \sigma(n-1) - (m+1) \\ &\iff 2m - 1 \mid 2m^2 + 2m - \sigma(n-1) \\ &\iff 2m - 1 \mid 3m - \sigma(n-1). \end{aligned}$$

Cum $\sigma(n-1) \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$, $3m - \sigma(n-1) \in \{m-1, m, \ldots, 3m-1\}$. Dar $m \geq 2$, deci pentru $2m - 1 \mid 3m - \sigma(n-1)$ este necesar ca $3m - \sigma(n-1) = 2m - 1$, adică $\sigma(n-1) = m + 1 = \sigma(n)$, imposibil deoarece σ este o permutare.

□

Barem

- Găsirea unui model pentru $n = 3$ **2p**
- Determinarea faptului că n este impar **2p**
- Determinarea valorii lui $\sigma(n)$ **3p**
- Obţinerea contradicţiei pentru $n > 3$ **2p**
- Oficiu **1p**

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie strict convexă, adică pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ distincte şi orice $t \in (0, 1)$, are loc inegalitatea $f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$.

(a) Să se demonstreze că pentru orice $a < b < c$ are loc relaţia:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

(b) Presupunem, de asemenea, că f este strict crescătoare şi există $x^* \in \mathbb{R}$ cu $f(x^*) = 0$. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 > x_1 > x^*$ arbitrare şi

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

pentru oricare $n \geq 1$.

Soluţie. (a) Prin înmulţirea cu $(b - a)(c - b) > 0$ şi calcul direct, avem următoarele echivalenţe:

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b} &\iff f(b) < \frac{c - b}{c - a} f(a) + \frac{b - a}{c - a} f(c) \\ &\iff f\left(\frac{c - b}{c - a} \cdot a + \frac{b - a}{c - a} \cdot c\right) < \frac{c - b}{c - a} f(a) + \frac{b - a}{c - a} f(c),\end{aligned}$$

adevărat deoarece f este strict convexă, $a \neq c$, şi $\frac{c-b}{c-a}, \frac{b-a}{c-a} \in (0, 1)$ au suma egală cu 1.

(b) Demonstrăm inductiv că, pentru orice $n \geq 1$, $x^* < x_n < x_{n-1}$.

Astfel, rezultă imediat că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător şi mărginit.

Cazul de bază $n = 1$ este evident adevărat din ipoteză.

Presupunem acum că pentru $n \geq 1$ fixat avem $x^* < x_n < x_{n-1}$ şi demonstrăm $x^* < x_{n+1} < x_n$.

Deoarece $x^* < x_n < x_{n-1}$, f este strict crescătoare şi $f(x^*) = 0$, avem $0 = f(x^*) < f(x_n) < f(x_{n-1})$, ceea ce, împreună cu relaţia din enunţ, conduce la:

$$x_n - x_{n+1} = f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} < x_n.$$

Aplicând subpunctul (a) cu $a = x^* < b = x_n < c = x_{n-1}$ şi folosind $f(x^*) = 0$, avem:

$$\frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} < \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} \iff \frac{f(x_n)}{x_n - x^*} < \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Folosind aceleaşi argumente ca mai sus, obţinem:

$$x_n - x^* > f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - x_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} > x^*.$$

Aşadar, obţinem $x^* < x_{n+1} < x_n$, ceea ce finalizează demonstraţia.

□

Barem

- Demonstraţia inegalităţii de la (a) **3p**
- Formularea ipotezei pentru inducţie **1p**
- Demonstraţia faptului că $x_{n+1} < x_n$ **2p**
- Demonstraţia faptului că $x^* < x_{n+1}$ **2p**
- Şirul este strict descrescător şi mărginit (chiar şi fără demonstraţie) **1p**
- Oficiu **1p**

Notă: La subpunctul (b) se va acorda maximul de **6p** pentru argumente geometrice corecte ce folosesc convexitatea strictă şi monotonia funcţiei f şi identifică x_{n+1} ca fiind abscisa punctului de intersecţie a axei Ox cu dreapta (secanta) ce trece prin punctele $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ şi $(x_n, f(x_n))$. Originea problemei este metoda secantei, ce este folosită pentru localizarea rădăcinii unei funcţii.

Problema 3. Fie $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x. Să se stabilească şi să se justifice valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele afirmaţii:

(a) Pentru orice mulţime $A \subseteq \mathbb{N}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\{10^n x\} > \frac{1}{2}$ dacă $n \in A$ şi $\{10^n x\} \leq \frac{1}{2}$ dacă $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

(b) Pentru orice mulţime $A \subseteq \mathbb{N}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\{10^{-n} x\} > \frac{1}{2}$ dacă $n \in A$ şi $\{10^{-n} x\} \leq \frac{1}{2}$ dacă $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

(c) Pentru orice mulţime $A \subseteq \mathbb{N}$, există $x \in \mathbb{Q}$ astfel încât: $\{10^n x\} > \frac{1}{2}$ dacă $n \in A$ şi $\{10^n x\} \leq \frac{1}{2}$ dacă $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Alex Buna-Mărginean

Soluţie. (a) Afirmaţia este adevărată.

Definim $x = \overline{0, d_0 d_1 d_2 \dots}$, unde $d_n = 6$ dacă $n \in A$ şi $d_n = 4$ dacă $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Atunci, cum înmulţirea cu 10^n mută virgula la dreapta n poziţii, $\{10^n x\} = \overline{0, d_n d_{n+1} \dots}$, care, prin construcţie, satisface condiţia dată.

(b) Afirmaţia este falsă.

Considerăm mulţimea numerelor naturale pare $A = \{0, 2, 4, \dots\}$.

Presupunem că există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\{10^{-2n} x\} > \frac{1}{2}$ şi $\{10^{-(2n+1)} x\} \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $x \geq 0$, există $n \geq 0$ pentru care $0 \leq 10^{-2n} x \leq \frac{1}{2}$, de unde $\{10^{-2n} x\} \leq \frac{1}{2}$. Astfel, este necesar ca $x < 0$. Dar atunci există $n \geq 0$ pentru care $-\frac{1}{2} < 10^{-(2n+1)} x < 0$, de unde $\{10^{-(2n+1)} x\} > \frac{1}{2}$, ajungându-se astfel la o contradicţie.

(c) Afirmaţia este falsă.

Altfel, notând cu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor submulţimilor lui $\mathbb{N}$, funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definită prin $f(q) = \{n \mid \{10^n q\} > \frac{1}{2}\}$ ar fi o surjecţie de la $\mathbb{Q}$ la $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dar $\mathbb{Q}$ este o mulţime numărabilă, iar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ este nenumărabilă, o contradicţie.

Soluţie alternativă: Pentru orice $q \in \mathbb{Q}$, şirul $q_n = \{10^n q\}$ este periodic de la un rang încolo. De aici obţinem că şirul

$$a_n = \begin{cases} 1, & q_n > \frac{1}{2}, \\ 0, & q_n \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

este periodic de la un rang încolo. Atunci, cum $a_n = 1$ dacă şi numai dacă $n \in A$, rezultă că mulţimea A ar trebui să conţină, exceptând câţiva termeni, o progresie aritmetică infinită. Dar, considerând mulţimea $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, obţinem o contradicţie.

□

Barem

- (a) Afirmaţia este adevărată. **1p**
- Demonstraţie **2p**
- (b) Afirmaţia este falsă. **1p**
- Demonstraţie **2p**
- (c) Afirmaţia este falsă. **1p**
- Demonstraţie **2p**
- Oficiu **1p**

Problema 4. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $x_{m,n} \in [0,1]$. Fie $\ell_m = \inf\{x_{m,n} \mid n \geq 1\}$ infimumul „liniei" $m \geq 1$ şi $c_n = \sup\{x_{m,n} \mid m \geq 1\}$ supremumul „coloanei" $n \geq 1$.

(a) Să se demonstreze că $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$.

(b) Dacă, în plus, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalităţile $x_{m,n} \leq x_{m+1,n} \leq x_{m,n} + 2^{-m}$, să se demonstreze că $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} = \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$.

Alex Buna-Mărginean

Soluţie. (a) Demonstrăm $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$ arătând că $\inf\{c_n \mid n \geq 1\}$ este un majorant al mulţimii $\{\ell_m \mid m \geq 1\}$, adică, pentru orice $m \geq 1$, $\ell_m \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$.

Fixăm $M \geq 1$ arbitrar. Pentru a demonstra că $\ell_M \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$, este suficient să demonstrăm că ℓ_M este un minorant al mulţimii $\{c_n \mid n \geq 1\}$, adică, pentru orice $n \geq 1$, $\ell_M \leq c_n$.

Fixăm $N \geq 1$ arbitrar şi demonstrăm că $\ell_M \leq c_N$. Într-adevăr,

$$\ell_M = \inf\{x_{M,n} \mid n \geq 1\} \leq x_{M,N} \leq \sup\{x_{m,N} \mid m \geq 1\} = c_N.$$

(b) Conform (a), este suficient să demonstrăm că $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \geq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$.

Fixăm $M \geq 1$ şi $n \geq 1$. Pentru orice $m \leq M$, avem $x_{m,n} \leq x_{m+1,n} \leq \ldots \leq x_{M,n}$, deci

$$x_{m,n} \leq x_{M,n} \quad \text{pentru orice } m \leq M. \tag{1}$$

Pe de altă parte, pentru $m > M$, avem

$$x_{m,n} - x_{M,n} = \sum_{i=M}^{m-1} (x_{i+1,n} - x_{i,n}) \leq \sum_{i=M}^{m-1} 2^{-i} = 2^{1-M}(1 - 2^{-(m-M)}) \leq 2^{1-M},$$

adică

$$x_{m,n} \leq x_{M,n} + 2^{1-M} \quad \text{pentru orice } m > M. \tag{2}$$

Combinând (1) şi (2), ajungem la

$$x_{m,n} \leq x_{M,n} + 2^{1-M} \quad \text{pentru orice } m \geq 1. \tag{3}$$

Cum membrul drept al inegalităţii (3) nu depinde de $m \geq 1$,

$$c_n = \sup\{x_{m,n} \mid m \geq 1\} \leq x_{M,n} + 2^{1-M} \tag{4}$$

Cum (4) are loc pentru orice $n \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} \inf\{c_n \mid n \geq 1\} &\leq \inf\{x_{M,n} + 2^{1-M} \mid n \geq 1\} = \inf\{x_{M,n} \mid n \geq 1\} + 2^{1-M} = \ell_M + 2^{1-M} \\ &\leq \sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} + 2^{1-M}. \end{aligned}$$

Astfel, $\varepsilon := \inf\{c_n \mid n \geq 1\} - \sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \leq 2^{1-M}$ pentru orice $M \geq 1$. Dacă $\varepsilon > 0$, alegând M natural cu $M \geq \max(1, \log_2 \frac{4}{\varepsilon})$ am avea $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$, imposibil. Deci $\varepsilon \leq 0$, adică $\inf\{c_n \mid n \geq 1\} \leq \sup\{\ell_m \mid m \geq 1\}$, ceea ce finalizează demonstraţia.

□

Barem

- (a) $\ell_m \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$ **1p**
- $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \leq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$ **2p**
- (b) Este suficient să demonstrăm că $\sup\{\ell_m \mid m \geq 1\} \geq \inf\{c_n \mid n \geq 1\}$ **1p**
- Demonstraţie **5p**
- Oficiu **1p**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Alexandru Papiu Ilarian“ Ediţia a XXIX-a Clasa a X-a 17.10.2026

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $[0,\infty)$ sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=z \\ \sqrt{x^2+y^2}+4\sqrt{x+y}=2\sqrt{2}z \end{cases}.$$

Cezar Ozunu, GMB

Soluţia 1. Din inegalitatea CBS avem $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \leq 2(x+y)$. Astfel, folosind prima ecuaţie, obţinem:

$$2\sqrt{2}z \leq 4\sqrt{x+y}.$$

Pe de altă parte, a doua ecuaţie conduce la

$$2\sqrt{2}z = \sqrt{x^2+y^2}+4\sqrt{x+y} \geq 4\sqrt{x+y}.$$

Aşadar, $2\sqrt{2}z = 4\sqrt{x+y}$ şi toate inegalităţiile trebuie să fie egalităţi.

De aici obţinem că $\sqrt{x^2+y^2}=0$, de unde $x=y=0$, iar apoi, din prima ecuaţie $z=0$. Astfel $x=y=z=0$ verifică și este unica soluție a sistemului dat. □

Soluţia 2. Înlocuim $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ în a doua ecuaţie, iar aceasta devine:

$$\sqrt{x^2+y^2}+4\sqrt{x+y}=2\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

care, prin ridicare la pătrat, devine echivalentă cu:

$$x^2+y^2+16(x+y)+8\sqrt{(x^2+y^2)(x+y)}=8(x+y+2\sqrt{xy}).$$

Mutăm totul în membrul stâng și obținem:

$$x^2+y^2+8(x+y-2\sqrt{xy})+8\sqrt{(x^2+y^2)(x+y)}=0,$$

iar apoi observăm că $x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$, deci ecuaţia devine:

$$x^2+y^2+8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+8\sqrt{(x^2+y^2)(x+y)}=0.$$

Acum în membrul stâng avem suma a trei termeni nenegativi egală cu 0, de unde rezultă că toţi termenii sunt nuli. Astfel, avem imediat că $x=y=0$, de unde obţinem mai departe că $z=0$ din prima ecuaţie. Astfel $x=y=z=0$ verifică și este unica soluție a sistemului dat. □

Barem

Soluţia 1:

- Obținerea inegalității $2\sqrt{2}z \leq 4\sqrt{x+y}$ **4p**
- Obținerea relaţiei $2\sqrt{2}z = 4\sqrt{x+y}$ **4p**
- Soluția este $x = y = z = 0$ **1p**
- Oficiu **1p**

Soluţia 2:

- Înlocuirea lui z și ridicarea la pătrat în a doua ecuație **3p**
- Rearanjarea ecuației ca sumă de trei termeni nenegativi (inclusiv $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$) **4p**
- Condiția ca toți termenii să fie nuli **1p**
- Soluția este $x = y = z = 0$ **1p**
- Oficiu **1p**

Notă: Pentru absența verificării soluției (aceasta poate fi făcută explicit sau poate fi făcută prin afirmația directă că soluția $x = y = z = 0$ verifică sistemul dat) se deduce **1p** din barem.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie astfel încât, pentru orice $k \geq 1$, mulţimea $\{i \in \mathbb{N}^* | f(i) = k\}$ este finită şi notăm cu a_k cardinalul său. În plus, $a_m a_n f(m+n) = f(m)+f(n)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Arătaţi că $a_k = 1$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Determinaţi toate funcţiile care satisfac ipoteza.

Bogdan Blaga

Soluţie. (a) Din definiţia funcţiei f, avem $f(m) + f(n) \geq 1 + 1 = 2$. Atunci $a_m a_n f(m + n) \geq 2$, de unde obţinem $a_n \geq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 1:

Presupunem prin absurd că există $N \geq 1$ cu $a_N \geq 2$. Cum $a_j \geq 1$ pentru orice $j \geq 1$, obţinem $f(N) + f(j) = a_N a_j f(N + j) \geq 2f(N + j)$, de unde

$$f(N + j) \leq \frac{f(N) + f(j)}{2}, \quad \text{pentru orice } j \geq 1.$$

Fie acum $M := \max\{f(1), f(2), \ldots, f(N)\} \geq 1$. Atunci, pentru $n \in \{N + 1, N + 2, \ldots, 2N\}$,

$$f(n) = f(N + (n - N)) \leq \frac{f(N) + f(n - N)}{2} \leq M,$$

adică $M = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(2N)\}$. Atunci, inductiv, $f(n) \leq M$ pentru orice $n \geq 1$, contrazicând faptul că $a_{M+1} \geq 1$.

Astfel, $a_k \geq 1$ şi $a_k < 2$, de unde deducem că $a_k = 1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2:

Cum $a_1, a_2 \geq 1$, există $r, s \geq 1$ pentru care $f(r) = 1, f(s) = 2$. Folosind ecuaţia din ipoteză pentru $(m, n) = (m, r)$ obţinem $a_m a_r f(m + r) = f(m) + 1$ de unde $a_m \mid f(m) + 1$. În mod analog, folosind $(m, n) = (m, s)$, avem $a_m \mid f(m)+2$. Astfel, $a_m \mid (f(m)+2)-(f(m)+1)$, adică $a_m \mid 1$, deci $a_m = 1$.

(b) Ecuaţia dată devine $f(m + n) = f(m) + f(n)$, iar pentru $n = 1$ avem $f(m + 1) = f(m) + f(1)$. Inductiv, obţinem $f(n) = nf(1)$ pentru orice $n \geq 1$.

Cum $a_k \geq 1$ pentru orice $k \geq 1$, este necesar ca $f(n) = n$ pentru orice $n \geq 1$, funcţie ce verifică ipoteza. □

Barem

- (a) $a_k \geq 1$ **1p**
- Demonstraţia faptului că $a_k = 1$ **4p**
- (b) $f(n) = nf(1)$ **1p**
- $f(1) = 1$ **2p**
- $f(n) = n$ verifică ipoteza **1p**
- Oficiu **1p**

Notă: Pentru absența verificării soluției (aceasta poate fi făcută explicit sau poate fi făcută prin afirmația directă că funcția $f(n) = n$ verifică cerințele) se deduce **1p** din barem.

Problema 3. Determinaţi mulţimile finite şi nevide $S \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $z \in S$,

$$\sum_{w\in S\setminus\{z\}} \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-\overline{z}}.$$

Bogdan Blaga

Soluţie. Fie $n = |S|$. Înmulţind relaţia dată cu z şi însumând peste $z \in S$, obţinem

$$\sum_{z\in S}\sum_{w\in S\setminus\{z\}} \frac{z}{z-w} = \sum_{z\in S} \frac{z}{z-\overline{z}}. \tag{1}$$

În membrul stâng grupăm cei doi termeni corespunzători unei perechi $\{z, w\}$ din S:

$$\frac{z}{z-w} + \frac{w}{w-z} = \frac{z-w}{z-w} = 1.$$

Astfel, membrul stâng este egal cu numărul de astfel de perechi, anume $\frac{n(n-1)}{2}$.
Fie acum $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq 0$. Atunci,

$$\frac{z}{z-\overline{z}} = \frac{x+iy}{2iy} = \frac{1}{2} - \frac{ix}{2y}.$$

Egalând părţile reale în (1), obţinem $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}$, de unde $n = 2$.
Astfel, $S = \{z, w\}$ cu $z \neq w$, iar ecuaţia dată pentru z devine

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-\overline{z}},$$

de unde $w = \overline{z}$. Reciproc, orice mulţime de forma $\{z, \overline{z}\}$, cu $z \notin \mathbb{R}$, verifică relaţia din enunţ, deoarece pentru fiecare element celălalt este conjugatul său. Aşadar, mulţimile cerute sunt toate mulţimile de forma $S = \{z, \overline{z}\}$ cu $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. □

Barem

- Obţinerea relaţiei (1) **3p**
- Membrul stâng în (1) este $\frac{n(n-1)}{2}$ **2p**
- Expresia pentru $\frac{z}{z-\overline{z}}$ (sau doar partea reală fiind $\frac{1}{2}$) **2p**
- Determinarea faptului că $n = 2$ **1p**
- Verificarea soluţiei **1p**
- Oficiu **1p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul şi numerele **reale** $a_1, a_2, \dots a_n > 0$. Demonstraţi că există numere **naturale nenule** $b_1, b_2, \dots, b_n$ astfel încât, pentru orice $S, T \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ disjuncte,

$$\sum_{i \in S} a_i \geq \sum_{j \in T} a_j \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \sum_{i \in S} b_i \geq \sum_{j \in T} b_j \ .$$

(Prin convenţie, $\sum_{i \in S} a_i = 0$ pentru $S = \emptyset$.)

Alex Buna-Mărginean

Soluţie. Considerăm toate diferenţele de forma $\sum_{i \in S} a_i - \sum_{j \in T} a_j$, unde $S, T \subseteq \{1, \dots, n\}$. Deoarece există un număr finit de astfel de diferenţe, putem nota cu $d > 0$ cea mai mică valoare absolută a unei diferenţe nenule. Înlocuind fiecare a_i cu a_i/d, nu modificăm inegalităţile din enunţ. Prin urmare, putem presupune că orice diferenţă nenulă dintre două astfel de sume are valoarea absolută cel puţin 1. În particular, $a_i \geq 1$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$.

Mai departe, demonstrăm următoarea versiune simultană a Teoremei de Aproximare a lui Dirichlet:

Lemă. Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$, există numere naturale nenule m şi $b_1, b_2, \dots, b_n$ astfel încât

$$|b_i - ma_i| < \frac{1}{n+1} \quad \text{pentru orice } i = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstraţia Lemei: Partiţionăm intervalul $[0, 1)$ în $n + 1$ intervale de lungime $\frac{1}{n+1}$ fiecare:

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{n+1}\right) \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n}{n+1}, 1\right).$$

Pentru orice $p \in \mathbb{N}$, considerăm părţile fracţionare $\{pa_1\}, \{pa_2\}, \dots, \{pa_n\}$. Le putem distribui în cele $n + 1$ intervale într-un număr finit de moduri (mai exact $(n + 1)^n$). Cum p poate lua o infinitate de valori, există $0 \leq k < \ell$ astfel încât $p := k$ şi $p := \ell$ oferă aceeaşi distribuţie, adică, $\{ka_i\}, \{\ell a_i\}$ aparţin aceluiaşi interval de lungime $\frac{1}{n+1}$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$, de unde

$$|\{ka_i\} - \{\ell a_i\}| < \frac{1}{n+1}, \quad \text{pentru orice } i = 1, 2, \dots, n,$$

Definim atunci $m = \ell - k \geq 1$ şi, pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$, numerele naturale

$$b_i := [\ell a_i] - [ka_i].$$

Atunci, pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$,

$$|b_i - ma_i| = |\{ka_i\} - \{\ell a_i\}| < \frac{1}{n+1}.$$

Cum $ma_i \geq 1$, avem $b_i > 0$. Dar b_i este natural, deci $b_i \geq 1$, ceea ce încheie demonstraţia Lemei. □

Revenind la problema iniţială, fie m şi $b_1, b_2, \dots, b_n$ numerele naturale nenule obţinute aplicând Lema precedentă. Considerăm $S, T \subseteq \{1, \dots n\}$ două mulţimi disjuncte şi

$$x = \sum_{i \in S} a_i - \sum_{j \in T} a_j, \quad y = \sum_{i \in S} b_i - \sum_{j \in T} b_j \in \mathbb{Z}.$$

Trebuie să demonstrăm că $x \geq 0$ dacă şi numai dacă $y \geq 0$.

Folosind inegalitatea triunghiului, $|b_i - ma_i| < \frac{1}{n+1}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, şi $|S| + |T| \leq n$, obţinem

$$\begin{aligned}
|y - mx| &= \left| \sum_{i \in S} b_i - \sum_{j \in T} b_j - m \left(\sum_{i \in S} a_i - \sum_{j \in T} a_j \right) \right| = \left| \sum_{i \in S} (b_i - ma_i) - \sum_{j \in T} (b_j - ma_j) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i \in S} (b_i - ma_i) \right| + \left| \sum_{j \in T} (b_j - ma_j) \right| \leq \sum_{i \in S} |b_i - ma_i| + \sum_{j \in T} |b_j - ma_j| \\
&\leq |S| \cdot \frac{1}{n+1} + |T| \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n+1} < 1.
\end{aligned}$$

Astfel, $y \in (mx - 1, mx + 1)$. Distingem trei cazuri:

- Dacă $x = 0$, atunci $|y| < 1$, iar cum $y \in \mathbb{Z}$, este necesar ca $y = 0$.
- Dacă $x > 0$, atunci conform celor presupuse iniţial $x \geq 1$, deci $y > mx - 1 \geq 0$.
- Dacă $x < 0$, atunci conform celor presupuse iniţial $x \leq -1$, deci $y < mx + 1 \leq 0$.

Astfel, am demonstrat că $x \geq 0$ dacă şi numai dacă $y \geq 0$. □

Barem

- Alegerea lui d și normalizarea diferențelor **1p**
- Aplicarea principiului cutiei pentru $k < \ell$ **2p**
- Construirea numerelor $m, b_1, \ldots, b_n$ și finalizarea Lemei **2p**
- Obținerea inegalității $|y - mx| < 1$ **2p**
- Tratarea celor trei cazuri **2p**
- Oficiu **1p**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Alexandru Papiu Ilarian“ Ediţia a XXIX-a Clasa a XII-a 17.10.2026 Barem

Problema 1. Se consideră $a > 0$ şi o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) + F\left(x + \frac{a}{2}\right) = F\left(x + \frac{a}{4}\right) + F\left(x + \frac{3a}{4}\right)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că:

(a) funcţia F este periodică;

(b) există $t \in (0, a)$ astfel încât $f(t)e^{-t} = a + (a-2)t - t^2$.

Vasile Giurgi, GMB

Soluţie. (a) Înlocuim x cu $x + \frac{a}{4}$ în ecuaţia dată şi obţinem:

$$F\left(x + \frac{a}{4}\right) + F\left(x + \frac{3a}{4}\right) = F\left(x + \frac{a}{2}\right) + F(x + a).$$

Împreună cu relaţia dată, obţinem $F(x) = F(x + a)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este periodică.

(b) Definim funcţia derivabilă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + e^x x(x - a)$. Observăm că:

$$G'(x) = f(x) + e^x x(x - a) + e^x(2x - a) = f(x) + e^x(x^2 - (a-2)x - a).$$

Astfel, concluzia este echivalentă cu existenţa unui $t \in (0, a)$ cu proprietatea că $G'(t) = 0$.

Totodată, $G(0) = F(0)$ şi, folosind subpunctul (a), $G(a) = F(a) = F(0)$. Atunci, conform Teoremei lui Rolle, există $t \in (0, a)$ astfel încât $G'(t) = 0$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Barem

- (a) Determinarea unei perioade a funcţiei F **3p**
- (b) Definirea funcţiei G **2p**
- Reformularea concluziei în funcţie de G' **2p**
- Aplicarea Teoremei lui Rolle **2p**
- Oficiu **1p**

Problema 2. Pentru orice $a > 0$ şi $b \geq 0$, definim funcţia $f_{a,b} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = \dfrac{a}{(1+bx)^2}$, şi considerăm mulţimea $S = \{f_{a,b} \mid a > 0, b \geq 0\}$.

(a) Arătaţi că $f_{a,b}$ este primitivabilă şi determinaţi primitiva $F_{a,b}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{x \searrow 0} F_{a,b}(x) = 0$.

(b) Definim pe S operaţia „$*$“ dată de $(f * g)(x) = f(G(x))g(x)$, unde G este primitiva lui g cu proprietatea de la (a). Arătaţi că „$*$“ este lege de compoziţie pe S, şi studiaţi comutativitatea şi asociativitatea acesteia.

Bogdan Blaga

Soluţie. (a) Funcţia $f_{a,b}$ este continuă, deci primitivabilă.
Pentru $b > 0$ obţinem succesiv:

$$\int f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int (1+bx)' \frac{a}{(1+bx)^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{b(1+bx)} + 2\int f_{a,b}(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = -\frac{a}{b(1+bx)} + \mathcal{C},$$

iar pentru a impune şi condiţia $\lim\limits_{x \searrow 0} F_{a,b}(x) = 0$, obţinem $F_{a,b}(x) = \frac{a}{b}\frac{-1}{1+bx} + \frac{a}{b} = \frac{ax}{1+bx}$.

Pentru $b = 0$ avem $\int f_{a,0}(x)\mathrm{d}x = ax + \mathcal{C}$, iar pentru a impune şi condiţia $\lim\limits_{x \searrow 0} F_{a,0}(x) = 0$, obţinem $F_{a,0}(x) = ax$. Aşadar, primitiva certă este $F_{a,b}(x) = \frac{ax}{1+bx}$, pentru orice $a > 0$ şi $b \geq 0$.
(b) Fie $f_{a,b}, f_{c,d} \in S$. Atunci, avem

$$\begin{aligned} f_{a,b}(G_{c,d}(x))f_{c,d}(x) &= \frac{a}{(1+bG_{c,d}(x))^2} \cdot \frac{c}{(1+dx)^2} = \frac{a}{\left(1+b\frac{cx}{1+dx}\right)^2} \cdot \frac{c}{(1+dx)^2} \\ &= \frac{a}{(1+dx+bcx)^2} \cdot c = \frac{ac}{(1+(d+bc)x)^2} = f_{ac,d+bc}(x). \end{aligned}$$

Astfel, $f_{a,b} * f_{c,d} = f_{ac,d+bc}$ deci, cum $ac > 0$ şi $d + bc \geq 0$, „$*$“ este lege de compoziţie pe S.
Legea „$*$“ *nu* este comutativă pe S. De exemplu, putem considera:

$$f_{1,1} * f_{2,1} = f_{2,3} \neq f_{2,2} = f_{2,1} * f_{1,1}.$$

Legea „$*$“ este asociativă pe S, deoarece avem succesiv:

$$(f_{a,b} * f_{c,d}) * f_{x,y} = f_{ac,d+bc} * f_{x,y} = f_{acx,y+xd+xbc} = f_{a,b} * f_{cx,y+xd} = f_{a,b} * (f_{c,d} * f_{x,y}).$$

□

Barem

- Identificarea primitivei $F_{a,b}$ **3p**
- Demonstrarea faptului că „$*$“ este lege de compoziţie pe S **4p**
- Comutativitate **1p**
- Asociativitate **1p**
- Oficiu **1p**

Problema 3. Considerăm o lege de compoziţie $* : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care are proprietatea că

$$(a * b) * c = \text{cmmdc}(a, b, c)$$

pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $a * b = \text{cmmdc}(a, b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Bogdan Blaga

Soluţie. Fixăm $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind relaţia din ipoteză pentru $a = b = c = n$, avem

$$(n * n) * n = \text{cmmdc}(n, n, n) = n, \tag{$\star$}$$

care, împreună cu relaţia din ipoteză aplicată cu $a = n * n$, $b = n$, $c = n$,

$$n * n = ((n * n) * n) * n = \text{cmmdc}(n * n, n, n) = \text{cmmdc}(n * n, n),$$

deci $n * n \mid n$.
Folosind $(\star)$ şi relaţia din ipoteză cu $a = n * n$, $b = n$, $c = n * n$, obţinem

$$n * (n * n) = ((n * n) * n) * (n * n) = \text{cmmdc}(n * n, n, n * n) = \text{cmmdc}(n * n, n) = n * n, \tag{$\star\star$}$$

unde pentru ultima egalitate am folosit $n * n \mid n$.
Atunci, folosind $(\star)$, $(\star\star)$ şi relaţia din ipoteză cu $a = n$, $b = n * n$, $c = n$, avem

$$n = (n * n) * n = (n * (n * n)) * n = \text{cmmdc}(n, n * n, n) = \text{cmmdc}(n, n * n) = n * n,$$

unde pentru ultima egalitate am folosit, din nou, $n * n \mid n$.
Într-un final, cum $n * n = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în particular pentru $n = a$, alegem $b = a$ şi $c = b$ în relaţia din ipoteză şi concluzionăm cu

$$a * b = (a * a) * b = \text{cmmdc}(a, a, b) = \text{cmmdc}(a, b).$$

□

Barem

- $(n * n) * n = n$ **1p**
- $n * n \mid n$ **3p**
- $n * (n * n) = n * n$ **1p**
- $n * n = n$ **2p**
- $a * b = \text{cmmdc}(a, b)$ **2p**
- Oficiu **1p**

Problema 4. Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite o primitivă F cu proprietatea $\lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = 0$. Presupunem că funcţiile $g, h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definite ca $g(x) = f(x)^2$ şi $h(x) = \dfrac{F(x)^2}{x^2}$ admit primitivele G şi respectiv H pentru care $\lim\limits_{x \searrow 0} G(x) = 0$.

(a) Demonstraţi că limita $L = \lim\limits_{x \searrow 0} H(x)$ există şi este finită.

(b) Determinaţi cea mai mică constantă reală C, independentă de funcţiile considerate, pentru care

$$H(x) \leq CG(x) + L, \quad \text{pentru orice } x \in (0,1).$$

Soluţie. (a) Cum $H'(x) = h(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0,1)$, funcţia H este crescătoare, deci, există $\lim\limits_{x \searrow 0} H(x)$, iar pentru a demonstra că este finită, este suficient să demonstrăm că funcţia H este mărginită inferior.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim $K_a(x) = G(x) - 2aF(x) + a^2 x$. Această funcţie este derivabilă, cu

$$K_a'(x) = f(x)^2 - 2af(x) + a^2 = (f(x) - a)^2 \geq 0,$$

deci funcţia K_a este crescătoare. Observăm şi că $\lim\limits_{x \searrow 0} K_a(x) = 0$, deci $G(x) - 2aF(x) + a^2 x \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $x \in (0,1)$. Fixăm $x_0 \in (0,1)$ şi alegem $a = F(x_0)/x_0$ pentru a obţine:

$$\frac{F(x_0)^2}{x_0} \leq G(x_0). \tag{1}$$

Fie acum $J(x) = 4G(x) - 2\dfrac{F(x)^2}{x} - H(x)$ tot o funcţie derivabilă, cu derivata:

$$\begin{aligned} J'(x) &= 4f(x)^2 - 2\left(\frac{2F(x)f(x)}{x} - \frac{F(x)^2}{x^2}\right) - \frac{F(x)^2}{x^2} = 4f(x)^2 - \frac{4F(x)f(x)}{x} + \frac{F(x)^2}{x^2} \\ &= \left(2f(x) - \frac{F(x)}{x}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Astfel, funcţia J este crescătoare. Fie $x_0 \in (0,1)$ fixat. Pentru $x \in (0, x_0)$ avem $J(x) \leq J(x_0)$, de unde $H(x) \geq 4G(x) - 2\dfrac{F(x)^2}{x} - J(x_0)$. Atunci, folosind (1) şi faptul că G este crescătoare (deoarece $G'(x) = f(x)^2 \geq 0$), avem:

$$H(x) \geq 4G(x) - 2\frac{F(x)^2}{x} - J(x_0) \geq 2G(x) - J(x_0) \geq 2\lim_{x \searrow 0} G(x) - J(x_0) = -J(x_0).$$

Astfel, H este mărginită inferior şi, fiind crescătoare, limita $L = \lim\limits_{x \searrow 0} H(x)$ există şi este finită.

(b) Cum (1) are loc pentru orice $x \in (0,1)$, trecând la limită obţinem $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{F(x)^2}{x} = 0$. Atunci, trecând la limită în definiţia funcţiei J, obţinem $\lim\limits_{x \searrow 0} J(x) = -L$. Dar, după cum am demonstrat anterior, J este crescătoare, deci $J(x) \geq -L$ pentru orice $x \in (0,1)$, echivalent cu

$$H(x) - L \leq 4G(x) - 2\frac{F(x)^2}{x} \leq 4G(x).$$

Aşadar, este necesar ca $C \leq 4$, şi construim pe mai departe un exemplu ce forţează $C \geq 4$.

Fie $r > \dfrac{1}{2}$ şi $f(x) = rx^{r-1}$. Se verifică uşor că

$$F(x) = x^r, \quad G(x) = \frac{r^2 x^{2r-1}}{2r-1}, \quad H(x) = \frac{x^{2r-1}}{2r-1}, \quad L = 0, \quad \frac{H(x) - L}{G(x)} = \frac{1}{r^2}\ .$$

Astfel, obţinem $C \geq \dfrac{1}{r^2}$ pentru orice $r > \dfrac{1}{2}$, de unde $C \geq 4$. Aşadar, putem concluziona cu $C = 4$. $\square$

Barem

- (a) Obţinerea relaţiei $\frac{F(x)^2}{x} \leq G(x)$ **3p**
- Demonstraţia faptului că L este finită **2p**
- (b) Demonstraţia faptului că $C \leq 4$ **2p**
- Construcţia unui model pentru $C \geq 4$ **2p**
- Oficiu **1p**